A. Mátrixalgebrai összefoglaló

1. Összeadás, kivonás

$$\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \pm \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}$$

2. Szorzás (sor-oszlop kombináció)

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \underline{c}$$

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} b_{1} \\ b_{2} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11}b_{1} + a_{12}b_{2} \\ a_{21}b_{1} + a_{22}b_{2} \end{bmatrix}}$$

$\underline{b}$ - oszlopmátrix
$\underline{a}^T$ - sormátrix

$$\underline{\underline{a}}^T \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{c}}^T$$

$$\underset{(1\times 2)}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}} \; \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(1\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) & (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) \end{bmatrix}}$$

3. Mátrix transzponáltja (tükrözés a főátlóra)

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad [\underline{\underline{A}}^T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

főátló: ahol az azonos indexű elemek allnak.

4. Szimmetrikus mátrix

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$$

5. Ferdén szimmetrikus mátrix

$$\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$$

6. Egységmátrix

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

7. Mátrix determinánsa

$$\det|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

8. Mátrix adjungáltja

$$\operatorname{adj} a_{ij} = A_{ij}$$

Az ij elemhez tartozó előjeles aldetermináns: Letakarjuk a (3×3) méretű mátrix ij eleméhez tartozó sort illetve oszlopot. A megmaradó (2×2) méretű mátrixnak vesszük a determinánsát.

9. Inverz mátrix

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} a_{ji}}{\det|a_{ij}|}$$

10. Lineáris algebrai egyenletrendszerek

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\}$$

megoldás:

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}}$$

11. Szinguláris mátrix: $\det|a_{ij}| = 0$

Rosszul kondícionált mátrix: $\det|a_{ij}| \approx 0$

B. Szilárdságtani összefoglaló

1. Szilárdságtani feladat

Adott: a szerkezet (alkatrész, test)

– geometriája (alakja)

– terhelése (más testek ismert erőhatása a test felületén)

– megtámasztása (a test felületi pontjainak ismert elmozdulása)

Elnevezés: terhelés — dinamikai peremfeltétel

megtámasztás — kinematikai peremfeltétel

Meghatározandó: a szerkezet minden pontjában

– az elmozdulások: u, v, w

– az alakváltozások

ε_x, ε_y, ε_z — fajlagos nyúlások

γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} — fajlagos szögtorzulások

– a feszültségek

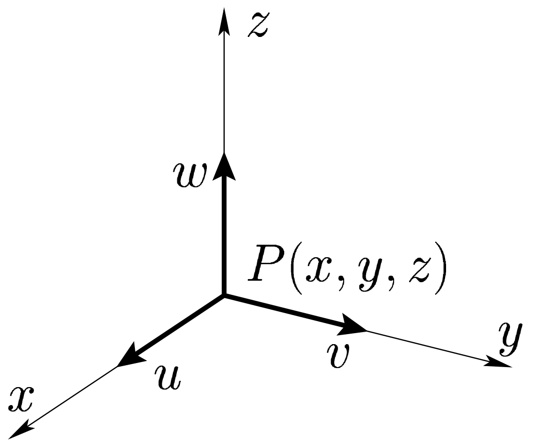
σ_x, σ_y, σ_z — normál feszültségek

τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} — csúsztató feszültségek

Indexek jelentése, sorrendje.

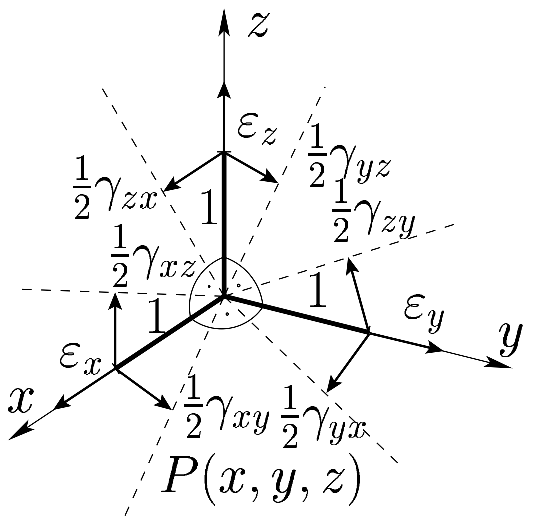
2. Szilárdságtani állapotok

a. Elmozdulási állapot: elmozdulásmező



$$\vec{t}(x,y,z) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$
$$u = u(x,z,y)$$
$$v = v(x,z,y)$$
$$w = w(x,z,y)$$

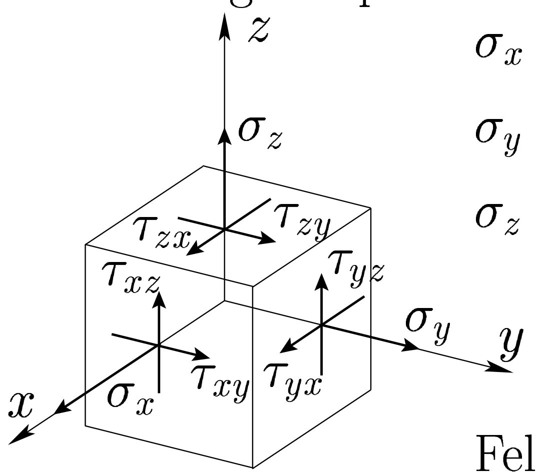
b. Alakváltozási állapot: alakváltozási mező



$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x,y,z) \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x,y,z)$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_y(x,y,z) \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x,y,z)$$
$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(x,y,z) \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}(x,y,z)$$

A mennyiségek geometriai tartalma.

c. Feszültségi állapot: feszültségmező



$$\sigma_x = \sigma_x(x,y,z) \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z)$$
$$\sigma_y = \sigma_y(x,y,z) \qquad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y,z)$$
$$\sigma_z = \sigma_z(x,y,z) \qquad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y,z)$$

Felületen megoszló belső erők.

A pont a kocka középpontjában van.

3. Szilárdságtani egyenletek

a. Egyensúlyi egyenletek

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

A térfogaton megoszló erőrendszer sűrűsége (intenzitása):

$$\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} \qquad \left[\frac{N}{m^3}\right]$$

Például: önsúly, forgásból származó erők

b. Geometriai (kinematikai) egyenletek

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

c. Anyagegyenletek (általános Hooke törvény)

$$\sigma_x = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

anyagegyenletek mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

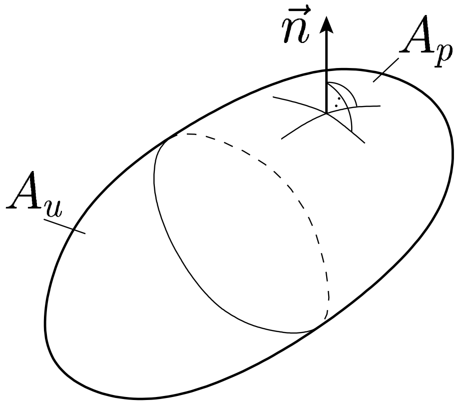
$$\underset{(6\times 1)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \underset{(6\times 6)}{\underline{\underline{C}}} \cdot \underset{(6\times 1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

Az anyag:

– lineárisan rugalmas (a $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ függvénykapcsolat lineáris)

– izotrop (az anyagjellemzők iránytól függetlenek)

d. Peremfeltételek



– kinematikai (geometriai)

$$(A_t) \quad \vec{t}(x,y,z) = \vec{t}_0$$

– dinamikai

$$(A_p) \quad \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$$

$(A) = (A_t) + (A_p)$

(A_t) – az a felület, ahol az elmozdulás ismert

(A_p) – az a felület, ahol a terhelés ismert