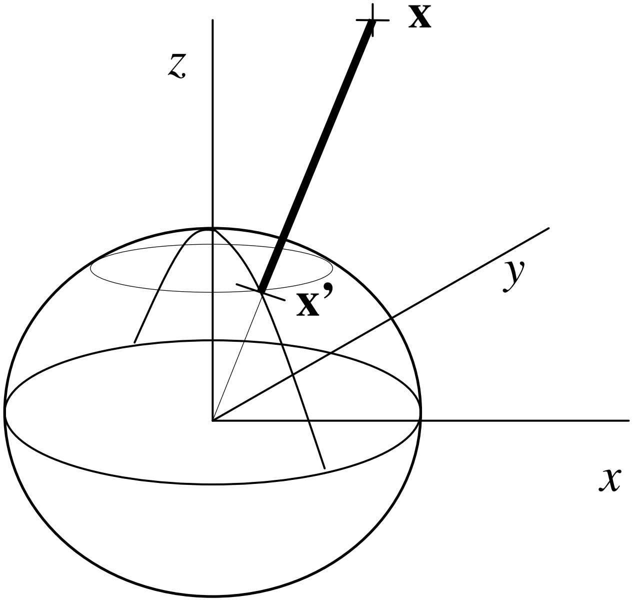
3D → 2D leképezések, 3D transzformációk

Vetítés félgömbfelületre

Legyen $S := \{(x', y', z') \in \mathbf{R}^3 : x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,\ z' > 0\}$ egy félgömbfelület.

Minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ esetén legyen $\mathbf{x}' \in S$ az a pont, ahol az origót $\mathbf{x}$-szel összekötő egyenes metszi S-et.

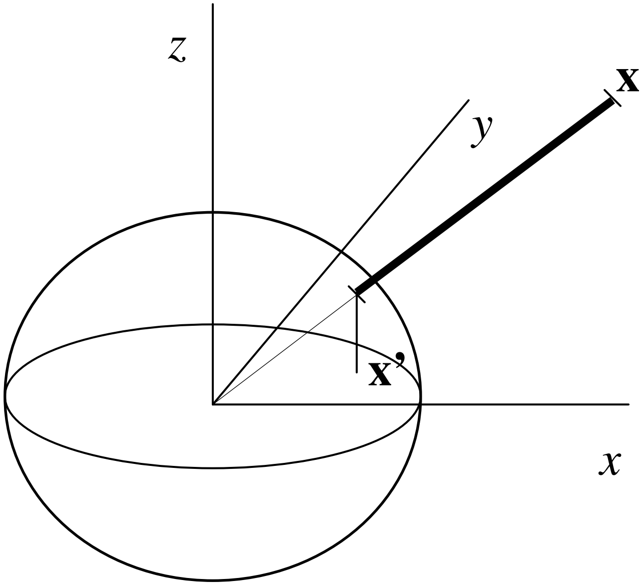
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$$



$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

$$\theta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

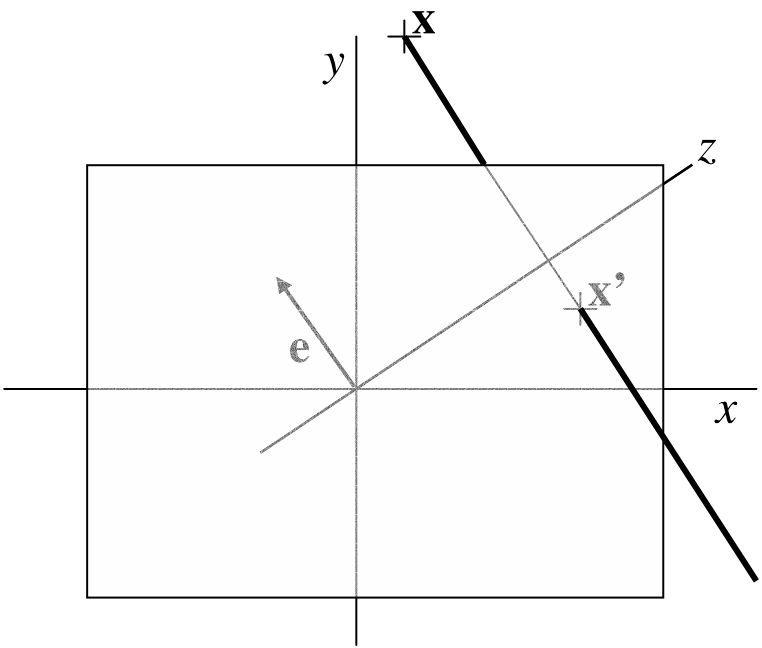
Vetítés a félgömbfelület alapkörére:



$$x' = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$y' = \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Axonometrikus leképezés



$\mathbf{e} := (u, v, 1)$ egy adott irány

Az **e** irányvektorú, **x**-en átmenő egyenes egyenlete:

$$x' = x + tu$$

$$y' = y + tv$$

$$z' = z + t$$

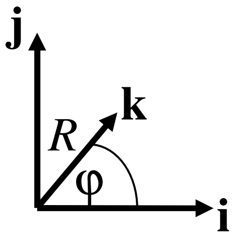
A döféspontra: $z' = 0$, innen a döféspont koordinátái:

$$\boxed{x' = x - uz, \quad y' = y - vz}$$

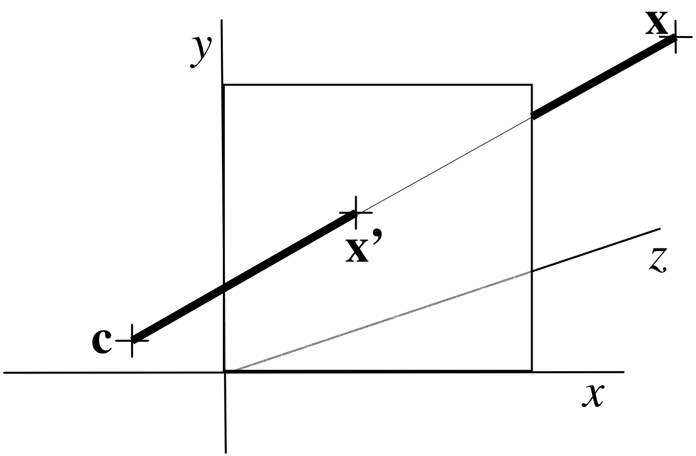
Jelölje $R\cos\varphi := -u, \quad R\sin\varphi := -v$, akkor

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + Rz\cos\varphi \\ y' &= y + Rz\sin\varphi \end{aligned}}$$

A (0,0,1) pont axonometrikus képe: $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$.
R: a **k** egységvektor képének hossza (**k** látszólagos hossza);
φ: a **k** egységvektor látszólagos szöge az **i** egységvektorral.



Perspektivikus leképezés



$\mathbf{c} := (c_x, c_y, c_z)$ adott pont (vetítési centrum), $c_z < 0$.

Az **x** és **c** pontokat összekötő egyenes egyenlete:

$$x' = x + t(c_x - x)$$

$$y' = y + t(c_y - y)$$

$$z' = z + t(c_z - z)$$

A döféspontra: $z' = 0$, azaz $t = -\dfrac{z}{c_z - z}$, innen a döféspont koordinátái:

$$x' = x - \frac{z(c_x - x)}{c_z - z} = \frac{c_z x - c_x z}{c_z - z}, \quad y' = y - \frac{z(c_y - y)}{c_z - z} = \frac{c_z y - c_y z}{c_z - z}.$$

Jelölje $u := \frac{c_x}{c_z}$, $v := \frac{c_y}{c_z}$, $w := \frac{1}{c_z}$ $(w \in (-\infty, 0))$, akkor:

$$\boxed{x' = \frac{x - uz}{1 - wz}, \quad y' = \frac{y - vz}{1 - wz}}$$

Horizont magasság = $c_y = \frac{v}{w}$.

$w = 0$ határeset: megegyezik az axonometrikus leképezéssel.

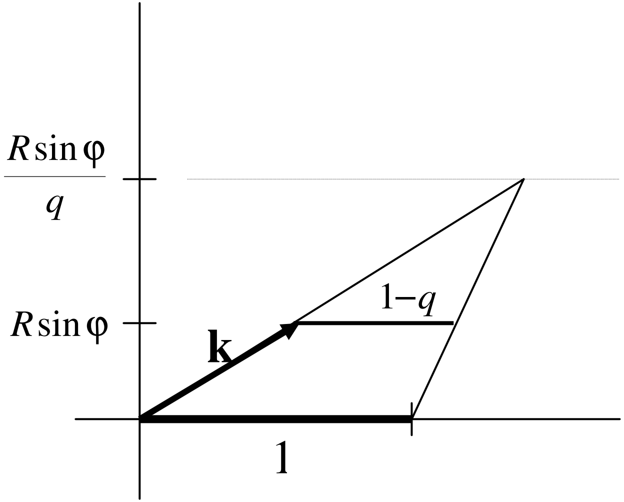
Jelölje $q := -\dfrac{w}{1-w} \in [0,1), \quad R\cos\varphi := -u(1-q), \quad R\sin\varphi := -v(1-q)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{(1-q)x + Rz\cos\varphi}{(1-q)+qz} \\ y' &= \frac{(1-q)y + Rz\sin\varphi}{(1-q)+qz} \end{aligned}}$$

A (0,0,1) pont perspektivikus képe: $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$.

R: a **k** egységvektor képének hossza (**k** látszólagos hossza);
φ: a **k** egységvektor látszólagos szöge az **i** egységvektorral.
q: a perspektivikus rövülést méri:

$q = 0$: nincs rövidülés; $q \to 1$: extrém rövidülés



$$(0,0,1)' = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$$

$$(1,0,1)' = (1-q+R\cos\varphi, R\sin\varphi)$$

A két képpont távolsága: $1-q$.

Más interpretáció: **k** végpontjának látszólagos magassága: $R\sin\varphi$.

A horizont magassága: $\lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{(1-q)y + Rz\sin\varphi}{(1-q)+qz} = \dfrac{R\sin\varphi}{q}$.

A kettő aránya: q.

2D kép leképezése pixelkoordinátákra

```
var color: TColor;
Form.Canvas.Pixels[ix,iy] := color;
```

ahol `ix = 0..Form.ClientWidth-1      (= Nx)`
`iy = 0..Form.ClientHeight-1    (= Ny)`

(0,0): bal felső sarok!

Ha tehát az ablak-sarokpontok (felhasználói koordinátákban): `xw1,yw1` és `xw2,yw2`, akkor az `x,y` felhasználó koordinátákhoz tartozó pixelkoordináták:

```
ix :=        round((x-xw1)*Nx/(xw2-xw1));
iy := Ny - round((y-yw1)*Ny/(yw2-yw1));
```

Perspektivikus leképezés, eredeti 3D felhasználói koordinátákból pixelkoordinátákra:

```
//u,v,w: globális paraméterek

type float = single;

procedure transfxyz(x,y,z: float; var ix,iy: integer);
var xx,yy: float;
begin
   xx := (x - u*z)/(1 - w*z);
   yy := (y - v*z)/(1 - w*z);
   ix :=      round((xx-xw1)*Nx/(xw2-xw1));
   iy := Ny - round((yy-yw1)*Ny/(yw2-yw1));
end;
```

Térlátás

Két egyidejű perspektivikus leképezés a $\left(c_x - \frac{d}{2}, c_y, c_z\right)$ és a $\left(c_x + \frac{d}{2}, c_y, c_z\right)$ vetítési centrumokkal ($c_z < 0$, d: a szemtávolság).

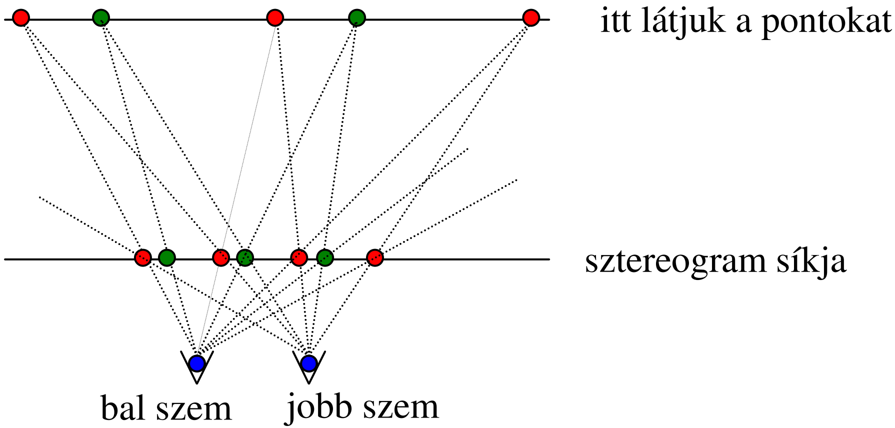
Az első általi képet a bal, a második általi képet a jobb szemhez eljuttatva, *automatikusan* kialakul a térlátás érzete.

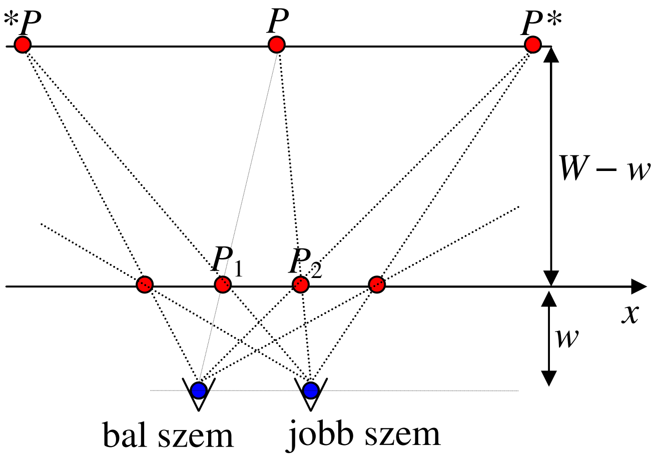
A képszétválasztás eszközei:

- zöld-piros képek, piros-zöld szemüveg (fehér háttér előtt) (nincs színhelyesség)
- váltogatott képmegjelenítés, szinkronizáló LCD-szemüveggel (színhelyes megjelenítés)
- ellazított vagy túlfókuszált nézés, sztereogramok

Sztereogramok 1.

Mélységillúzió mögénézéssel





Bal szem: $(-\frac{d}{2},0,-w)$

Jobb szem: $(\frac{d}{2},0,-w)$

Legyen $\boxed{P := (x, y, W - w)}$ tetszőleges. Állítsuk elő az azonos színű $P^*, P^{**},\ldots,{}^*P,{}^{**}P,\ldots$ pontok sorozatát! Ezek bal- és jobb szemre vonatkozó perspektivikus képei ugyancsak azonos színűek. Ezek összessége alkotja a sztereogramot, miközben P befutja a $z = W - w$ síkot.

Legyen $(x'', y'') := P_2 := P$ perspektivikus képe a *jobb* szemre nézve:

$$\boxed{x'' = \frac{wx + \frac{d}{2}(W - w)}{W}, \quad y'' = \frac{wy}{W}}.$$

A bal szemet P_2-vel összekötő egyenes egyenlete:

$$X = -\frac{d}{2} + t(x'' + \frac{d}{2}), \quad Y = ty'', \quad Z = -w + tw$$

Ez az egyenes döfi ki a $P^* := (x^*, y^*, z^*)$ pontot a $z = W - w$ síkból. A döféspontban $z^* = -w + tw = W - w$, innen $\boxed{t = \frac{W}{w}}$. Ezzel a t-vel:

$$\boxed{x^* = -\frac{d}{2} + t \cdot \left(x'' + \frac{d}{2} \right), \quad y^* = t \cdot y'', \quad z^* = W - w}.$$

Az eljárást ismételve kapjuk a $P^{**}, P^{***}, \ldots$ pontokat.

Most legyen $(x', y') := P_1 := P$ perspektivikus képe a *bal* szemre nézve:

$$\boxed{x' = \frac{wx - \frac{d}{2}(W - w)}{W}, \quad y' = \frac{wy}{W}}.$$

A jobb szemet P_1-gyel összekötő egyenes egyenlete:

$$X = \frac{d}{2} + t(x' - \frac{d}{2}), \quad Y = ty', \quad Z = -w + tw$$

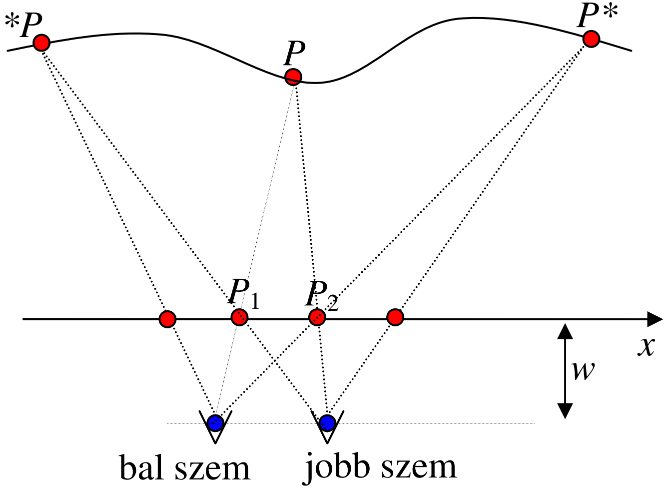
Ez az egyenes döfi ki a $*P := (*x, *y, *z)$ pontot a $z = W - w$ síkból. A döféspontban $*z = -w + tw = W - w$, innen $\boxed{t = \frac{W}{w}}$. Ezzel a t-vel:

$$\boxed{*x = \frac{d}{2} + t \cdot \left(x' - \frac{d}{2} \right), \quad *y = t \cdot y', \quad *z = W - w}.$$

Az eljárást ismételve kapjuk a $**P, ***P, \ldots$ pontokat.

Sztereogramok 2.

Sztereogram előállítása véletlen pásztázással:



ezt a felületet látjuk

$z = f(x, y)$

(mélységfüggvény)

Bal szem: $(-\frac{d}{2}, 0, -w)$, jobb szem: $(\frac{d}{2}, 0, -w)$.

Legyen $(x'', y'') := P_2 := P$ perspektivikus képe a *jobb* szemre nézve:

$$\boxed{x'' = \frac{wx + \frac{d}{2}(W - w)}{W}, \quad y'' = \frac{wy}{W}}.$$

A bal szemet P_2-vel összekötő egyenes egyenlete:

$$X = -\frac{d}{2} + t(x'' + \frac{d}{2}), \quad Y = ty'', \quad Z = -w + tw$$

Ez az egyenes döfi ki a $P^* := (x^*, y^*, z^*)$ pontot a $z = f(x, y)$ felületből. A döféspontban $z^* = f(x^*, y^*) = -w + tw$, és:

$$\boxed{x^* = -\frac{d}{2} + t \cdot \left(x'' + \frac{d}{2} \right), \quad y^* = t \cdot y'', \quad z^* = -w + tw},$$

ahol t megoldása a $\boxed{-w + tw = f(-\frac{d}{2} + t \cdot (x'' + \frac{d}{2}), t \cdot y'')}$ nemlineáris egyenletnek. Az eljárást ismételve kapjuk a $P^{**}, P^{***}, \ldots$ pontokat.

Most legyen $(x', y') := P_1 := P$ perspektivikus képe a *bal* szemre nézve:

$$\boxed{x' = \frac{wx - \frac{d}{2}(W-w)}{W}, \quad y' = \frac{wy}{W}}.$$

A jobb szemet P_1-gyel összekötő egyenes egyenlete:

$$X = \frac{d}{2} + t(x' - \frac{d}{2}), \quad Y = ty', \quad Z = -w + tw$$

Ez az egyenes döfi ki a $*P := (*x, *y, *z)$ pontot a $z = f(x, y)$ felületből. A döféspontban $*z = f(*x, *y) = -w + tw$, és:

$$\boxed{*x = \frac{d}{2} + t \cdot \left(x' - \frac{d}{2} \right), \quad *y = t \cdot y', \quad *z = -w + tw},$$

ahol t megoldása a $\boxed{-w + tw = f(\frac{d}{2} + t \cdot (x' - \frac{d}{2}), t \cdot y')}$ nemlineáris egyenletnek. Az eljárást ismételve kapjuk a $**P, ***P, \ldots$ pontokat.

A fenti nemlineáris egyenletek megoldása történhet pl. intervallumfelezéssel, vagy a *Banach-fixponttétellel*.
Pl. P^* meghatározása esetén:
$-w + tw = f(-\frac{d}{2} + t \cdot (x'' + \frac{d}{2}), t \cdot y'')$, innen

$$\boxed{t = 1 + \frac{1}{w} f(-\frac{d}{2} + t \cdot (x'' + \frac{d}{2}), t \cdot y'') =: g(t)}$$

A megoldáshoz konvergáló fixpont-iteráció: $\boxed{t_{n+1} := g(t_n)}$ $(n = 0,1,2...)$ feltéve, hogy g kontrakció.

Koordinátatranszformációk

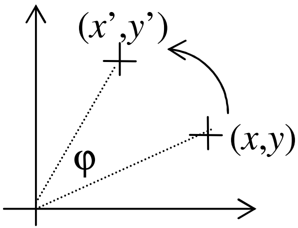
Speciális $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ leképezések:

1.*Eltolás*: $\boxed{\mathbf{x}' := \mathbf{x} + \mathbf{a}}$ $\quad$ ($\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ adott vektor)

2.*Skálázás*: $\boxed{\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \mathbf{x}}$ $\quad$ ($s_x, s_y, s_z \in \mathbf{R}$ adott számok)

3.*Forgatások*: $\boxed{\mathbf{x}' := \mathbf{A}\mathbf{x}}$, ahol $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{3\times 3}$ *unitér mátrix*, azaz oszlopai páronként ortogonálisak, és 1 normájúak. (Ekkor $\mathbf{A}^{-1} = A^*$.)

(a) *Forgatás a z tengely körül*:



$$\boxed{\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}}$$

(b) *Forgatás az x tengely körül*: $\boxed{\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mathbf{x}}$

(c) *Forgatás az y tengely körül*: $\boxed{\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}}$

4. *Nyírás*: $\boxed{\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}}$, ez az $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ alakú vektorokat

helybenhagyja. A $\mathbf{k}$ vektor képe: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

Általában: $\boxed{\mathbf{x}' := \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}}$

(ahol $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{3\times 3}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ adottak).

Homogén koordináták

Tetszőleges $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ vektornak feleltessük meg az $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ négydimenziós vektort (*homogén koordináták*). Akkor az $\mathbf{x}' := \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ leképezés *egyetlen* mátrix-vektor-szorzással valósítható meg:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & a_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$