Gáspár Csaba
SZE-MTK, Matematika és Számítástudomány Tanszék

# Analízis és differenciálegyenletek
# KÉZIRAT, NEM VÉGLEGES!

2012

Műszaki és természettudományos alapismeretek
tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben
Pályázati azonosító: TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával,
az Európai Szociális Alap
társfinanszírozásával valósul meg.

# Tartalom

# 1. Bevezetés

A jegyzet a Széchenyi István Egyetem mérnöki BSC-szakos hallgatói számára készült, az analízis tárgy bevezető fejezeteit tartalmazza.

Feltételezzük a szokásos középiskolai matematika ismeretét, de arra nem építünk: minden lényeges fogalmat definiálunk, és az állítások, tételek túlnyomó többségét be is bizonyítjuk. Kivételt csak a nagyon egyszerű és a nagyon nehéz állítások képeznek: előbbi esetben a bizonyításokat gyakorlásképp az Olvasónak javasoljuk elvégezni, míg utóbbi esetben a jegyzetben felépített matematikai eszköztár nem elegendő a bizonyításra.

A jegyzet fejezetei: alapvető fogalmak és összefüggések, komplex számok, sorozatok, sorok, valós függvények, differenciálszámítás, Taylor-sorok, primitív függvények és Riemann-integrál, végül közönséges differenciálegyenletek.

A jegyzet leckékre van tagolva. Egy-egy lecke anyagát olyan összefüggő, egy témakörhöz tartozó anyag alkotja, melyet egyetlen alkalommal át lehet tekinteni. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy a tanulás későbbi fázisaiban a korábbi leckéket már nem kell újra és újra átfutni. Épp ellenkezőleg: sokszor a későbbiek folyamán derül ki igazán egy-egy fogalom, tétel vagy módszer tulajdonképpeni jelentősége.

Mindegyik fejezet utolsó leckéje a fejezet témakörébe vágó feladatokat tartalmaz. Ugyanitt megtalálhatók a megoldások is (levezetésekkel, útmutatásokkal együtt). Ezek tanulmányozása az anyag megértését nagyban elősegíti, de ez semmiképp nem pótolja egy önálló feladatgyűjtemény használatát. A feladatok előtt „Ellenőrző kérdések" cím alatt rövidebb-hosszabb tesztfeladat-sorozat található a fejezetben leírt ismeretek elsajátításának gyors ellenőrzésére.

Kérjük a tisztelt Olvasókat, hogy véleményüket, megjegyzéseiket, észrevételeiket küldjék el a

gasparcs@sze.hu

e-mail címre.
Eredményes felhasználást kíván a szerző:

Dr. Gáspár Csaba

# 1. lecke

# Halmazok és függvények

# 2. Alapvető fogalmak és összefüggések

## 2.1. Halmazelméleti alapok

A halmaz fogalma alapfogalom, és mint ilyen, nem definiálható (ui. a definíciónak szükségképp még egyszerűbb fogalmakra kellene építenie). Szemléletesen: a halmaz bizonyos dolgok, elemek összessége. Bármely halmaz és bármely elem esetén a következő két, egymást kizáró alternatíva teljesül: a szóban forgó elem hozzátartozik a halmazhoz vagy nem tartozik hozzá. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha valamilyen módon meghatározható, hogy mely elemek alkotják.

A későbbiekben a halmazelméletnek csak néhány alapvető fogalom- és jelölésrendszerére lesz szükségünk, a halmazelmélet mélyebb tárgyalására – ami egyébként igen nehéz – nem kerül sor.

*Néhány speciális halmaz*. A továbbiakban használni fogjuk az alábbi jelöléseket:

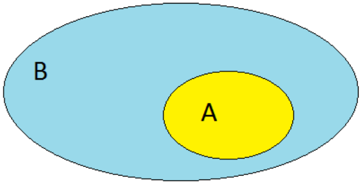
**N**: a természetes számok (pozitív egészek) halmaza,
**Z**: az egész számok halmaza,
**Q**: a racionális számok halmaza,
**R**: a valós számok halmaza,
**C**: a komplex számok halmaza (ld. a következő fejezetet).
Az $x \in A$ jelölés a későbbiekben azt jelenti, hogy $x$ eleme az $A$ halmaznak. Ha $x$ nem tartozik $A$-hoz (nem eleme $A$-nak), azt az $x \notin A$ szimbólummal jelöljük.

Bizonyos halmazokat (nem mindegyiket) megadhatjuk elemeik felsorolásával, pl. $\{a,b,c,...\}$ jelöli az $a,b,c,...$ elemek alkotta halmazt (adott esetben világosan definiáltnak kell lenni, hogy mely egyéb elemek tartoznak hozzá). Máskor az elemek tulajdonságával adunk meg halmazokat, pl. $\{n \in \mathbf{N} : n|8\}$ jelöli a 8 összes pozitív osztóinak halmazát, azaz az $\{1,2,4,8\}$ négyelemű számhalmazt. Más példa: $\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq 4\}$ jelöli mindazon valós számok halmazát, melyek négyzete legfeljebb 4, azaz a $[-4,4]$ zárt intervallumot.

Bevezetünk egy speciális halmazt, melynek egyetlen eleme sincs. Ezt *üres halmaznak* nevezzük, és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

Szokás a halmazok szemléletes ábrázolására ún. *Venn-diagramokat* használni. Itt a halmazokat síkbeli alakzatokkal szemléltetjük. Halmazelméleti összefüggések szemléltetésére a Venn-diagramok nagyon jól használhatók (bizonyító erejük azonban nincs).

**2-1. Definíció:** Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *része* (vagy *részhalmaza*) a $B$ halmaznak, ha $A$ minden eleme egyúttal $B$-nek is eleme. Jele: $A \subset B$.




1. ábra. A részhalmaz szemléltetése Venn-diagramokkal

Világos, hogy minden $A$ halmaz esetén $A \subset A$ . Nyilvánvaló az is, hogy az $A$, $B$ halmazok pontosan akkor egyenlők, ha $A \subset B$ és $B \subset A$ egyszerre teljesül. Következésképp, ha két halmaz, pl. $A$, $B$ egyenlőségét kell igazolni, ez mindig két részből áll: meg kell mutatni, hogy egyfelől $A \subset B$, másrészt pedig $B \subset A$ is teljesül.

Az $A$ halmazt a $B$ halmaz *valódi részének* nevezzük, ha $A \subset B$, de $A \neq B$ (tehát $B$-nek van olyan eleme is, mely $A$-hoz nem tartozik hozzá).

*Megállapodás*. Az üres halmazt bármely halmaz részhalmazának tekintjük.

**2-1. Állítás:** (a tartalmazás tranzitivitása). Ha az $A$, $B$, $C$ halmazok olyanok, hogy $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor szükségképp $A \subset C$ is teljesül.

Bizonyítás:

A tartalmazás definíciója alapján nyilvánvaló. □

**2-2. Definíció:** Az A halmaz *hatványhalmazának* azt a $2^A$ (más jelöléssel: $P(A)$) halmazt nevezzük, melynek elemei $A$ részhalmazai.

Röviden: $2^A := \{B : \ B \subset A\}$. A fenti megállapodás értelmében $\emptyset \in 2^A$ mindig teljesül.

A jelölést az indokolja, hogy – mint azt később megmutatjuk – ha $A$ véges, éspedig $n$ elemből áll, akkor $2^A$ elemeinek száma épp $2^n$.

**2-1. Példa:** Legyen $A := \{1,2,3\}$ (háromelemű halmaz). Akkor

$$2^A = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

(nyolcelemű halmaz).

Legyenek $A$, $B$ tetszőleges halmazok.

**2-3. Definíció:** Az $A$, $B$ halmazok *uniójának* (vagy *egyesítésének*) az

$$A \cup B := \{x : \ x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

halmazt nevezzük. (Itt a „vagy” megengedő értelemben szerepel: $x \in A \cup B$ pontosabban azt jelenti, hogy $x$ az $A$, $B$ halmazok *legalább egyikében* benne van.)
Az $A$, $B$ halmazok *metszetének* az

$$A \cap B := \{x : \ x \in A, x \in B\}$$

halmazt nevezzük.
Az

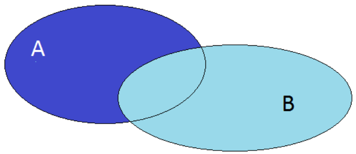
$$A \backslash B := \{x \in A : \ x \notin B\}$$

halmazt pedig az $A$, $B$ halmazok *különbségének* nevezzük.


2. ábra. Az unió és a metszet szemléltetése Venn-diagramokkal

**2-4. Definíció:** Két halmazt *diszjunktnak* nevezünk, ha metszetük az üres halmaz, azaz nincs közös elemük.

*Megállapodás*. A továbbiakban többnyire olyan halmazokkal fogunk foglalkozni, melyek egy adott, rögzített $X$, ún. alaphalmaz részhalmazai. Legyen $A \subset X$ , akkor az $X \backslash A$ halmazt az $A$ halmaznak $X$-re vonatkozó




3. ábra. A különbség szemléltetése Venn-diagramokkal

*komplementumának* (vagy *komplementer halmazának*) nevezzük, és $\overline{A}$-sal jelöljük. Megjegyezzük még, hogy a halmazok különbsége kifejezhető a metszet és a komplementum segítségével, ld. a 2-2 Feladatot.

Az alábbiakban összefoglaljuk a fentebb definiált halmazműveletekre vonatkozó legfontosabb összefüggéseket. Ezek a definíciókból könnyen adódnak, így a bizonyításokat elhagyjuk.

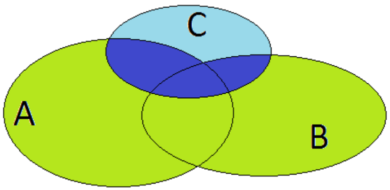
Legyen $X$ egy adott alaphalmaz, $A,B,C \subset X$ tetszőlegesek.

**2-2. Állítás:** Az unió

- kommutatív: $A \cup B = B \cup A$,
- asszociatív: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,
- a metszetre nézve disztributív: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

A metszet

- kommutatív: $A \cap B = B \cap A$ ,
- asszociatív: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ,
- az unióra nézve disztributív: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .




4. ábra. A disztributivitás szemléltetése Venn-diagramokkal

Megjegyzés: A különbség nem kommutatív és nem is asszociatív.

Következésképp többtagú (akár végtelen tagú!) uniókat, metszeteket nem kell zárójelezni. Ezekre az alábbi rövid jelöléseket fogjuk alkalmazni :

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

ill.

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Az alábbi egyenlőségek triviálisak:

**2-3. Állítás:** Tetszőleges $X$ alaphalmaz és $A \subset X$ részhalmaz esetén:
$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$, $A \cap X = A$,
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

A következő állítás már némi meggondolást igényel (bizonyítását feladatnak tűzzük ki):

**2-4. Állítás:** (De Morgan-azonosságok): Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$ tetszőleges részhalmazai az $X$ alaphalmaznak. Akkor

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j},$$

és

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

**2-5. Definíció:** Legyenek $A$, $B$ tetszőleges halmazok. Az $A$ és $B$ halmazok *Descartes-szorzatának* az

$$A \times B := \{(x,y) : \ x \in A, \, y \in B\}$$

halmazt nevezzük. Ennek elemei rendezett párok, melyek első eleme $A$-ból, második eleme $B$-ből való.

Hasonlóan definiálunk többtényezős Descartes-szorzatokat rendezett hármasok, négyesek stb. segítségével.

Az $(x_1,y_1)$ és $(x_2,y_2)$ rendezett párt akkor tekintjük *egyenlőnek*, ha első és második komponenseik is rendre megegyeznek: $x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$.

Ha a Descartes-szorzatban szereplő halmazok mind megegyeznek, akkor a Descartes-szorzat jelölésére egyszerűen hatványjelöléseket is alkalmazunk: $A^2 := A \times A$, $A^3 := A \times A \times A$, és így tovább.

2-2. Példa: $\mathbf{R}^2$ elemei rendezett valós számpárok, amelyeket természetes módon lehet azonosítani egy sík pontjaival (pl. egy rögzített Descartes-féle koordinátarendszer segítségével). Hasonlóan, $\mathbf{R}^3$ a térrel azonosítható.

**Függvényfogalom**

2-6. Definíció: Legyen $A$ és $B$ tetszőleges halmaz. Egy *$A$-ból $B$-be képező függvényen* olyan $f$ hozzárendelési utasítást értünk, mely $A$ bizonyos elemeihez hozzárendeli $B$ egy-egy elemét. Jelölése: $f : A \to B$ ($A$-ból $B$-be képező $f$ függvény).

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x)$ jelölés nem magát a függvényt jelenti, hanem annak értékét az $x \in A$ pontban, tehát a $B$ halmaz egy elemét!

Egyéb elnevezések: hozzárendelés; leképezés; operátor (ha $A$, $B$ elemei maguk is bizonyos függvények, így $f$ függvényhez függvényt rendel); funkcionál (ha $B$ számhalmaz).

2-7. Definíció: Az $f : A \to B$ függvény *értelmezési tartományának* mindazon $A$-beli elemek $\mathcal{D}_f$-fel jelölt összességét nevezzük, melyekhez az $f$ függvény egyáltalán rendel valamilyen ($B$-beli) értéket. Az $f$ függvény *értékkészlete* alatt az $\mathcal{R}_f := \{f(x) : \ x \in \mathcal{D}_f\} \subset B$ halmazt értjük.

Tetszőleges $f : A \to B$ függvény esetén az $\{(x, f(x)) : \ x \in \mathcal{D}_f\}$ alakú rendezett párok összességét (ami tehát az $A \times B$ Descartes-szorzathalmaz részhalmaza) az $f$ függvény *gráfjának* vagy *grafikonjának* nevezzük.

Megjegyzés: Ha mind az értelmezési tartomány, mind az értékkészlet valós számokból áll (azaz a függvény $\mathbf{R}$-ből $\mathbf{R}$-be képez), akkor a függvény grafikonja igen sokszor egy síkbeli görbe (anélkül, hogy ezt a fogalmat most pontosan definiálnánk). Megfordítva ez nem így van: nem minden síkbeli görbe fogható fel valamilyen függvény grafikonjaként, csak olyanok, melyek "nem hajlanak maguk alá". Szemléletesen világos, hogy egy függvény grafikonja olyan síkbeli ponthalmaz, mely kielégíti a *függőleges vonal próbát*, azaz a sík bármely függőleges egyenesének legfeljebb egy közös pontja van a grafikonnal (ellenkező esetben ugyanahhoz az argumentumhoz több, különböző függvényérték is tartozna, melyet a definícióból kizártunk.)

*Függvények megadása*

A függvényeket leggyakrabban *formulával* szokás megadni, pl. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := 1 + \sin 2x$. Két másik elterjedt jelölésforma: $f(x) := 1 + \sin 2x \;\; (x \in \mathbf{R})$ és $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\; x \mapsto 1 + \sin 2x$. Ilyen megadásnál, ha az értelmezési tartományt nem adjuk meg explicit módon, akkor mindig feltételezzük, hogy az értelmezési tartomány az a legbővebb $\mathbf{R}$-beli halmaz, melyen a szóban forgó formula értelmezve van. Sokszor előfordul az is, hogy az értelmezési tartomány egyes részhalmazain más és más formula definiálja a függvényt.

Egy másik (a fizikában és a mérnöki tudományokban gyakran előforduló) megadási mód a *paraméteres megadás*, ilyenkor a függvény argumentumát és a függvényértéket egyaránt egy másik „segédváltozó" (paraméter) függvényében adjuk meg. Így például az $x := R\cos\omega t$, $y := R\sin\omega t$ képletpár írja jel az origó középpontú $R$ sugarú kör kerületén állandó $\omega$ szögsebességgel egyenletes körmozgást végző pont helyzetét (pontosabban: a mozgó pont koordinátáit). Itt $t$ az időt jelenti. A $t$ paraméter kiküszöbölésével meghatározható, hogy az $y$ koordináta hogyan függ közvetlenül az $x$ koordinátától: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (felső félkörív egyenlete) vagy $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ is (alsó félkörív egyenlete); sokszor azonban kényelmesebb a függvényt az eredeti, paraméteres formában kezelni.

Végül megemlítendő az *implicit függvénymegadás*, amikor explicit formula helyett egy olyan egyenlőség adott, mely a függvény argumentumát és a függvényértéket egyaránt tartalmazza. Így pl. legyen egy $y$ függvény olyan, amely kielégíti az $x^2 + \sqrt{y-1} = 3$ egyenletet. Ilyen függvény most valóban létezik, explicit alakja $y(x) = 1 + (3 - x^2)^2$ . Előfordulhat, hogy az implicit alak nem határoz meg semmilyen függvényt, de az is, hogy több különböző függvényt is meghatároz. Pl. a kör implicit egyenletét ($x^2 + y^2 = R^2$) két függvény is kielégíti (az $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ és az $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ explicit formulákkal adott függvények). Ilyenkor alkalmas korlátozó feltételekkel lehet a megfelelő függvényt kiválasztani (különös figyelmet fordítva az értelmezési tartomány helyes megadására). Az implicit függvénymegadás különösen olyan esetekben fontos, ahol az implicit egyenlőségből a függvényértéket nem vagy csak nagyon bonyolult módon lehet kifejezni. Tipikusan ez a helyzet, ha ($y$-nal jelölve a függvényértéket) az implicit alak $y$-ra nézve egy magas fokszámú algebrai egyenlet.

2-8. Definíció: Ha $f : A \to B$, $g : B \to C$ olyan függvények, hogy $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_g$, akkor a $g$ és $f$ függvények *kompozíciójának* azt a $g \circ f : A \to C$ függvényt nevezzük, mely egy tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ elemhez a $g(f(x)) \in C$ elemet rendeli, azaz $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ .

Megjegyzés: A kompozíciót szokás még *összetett függvénynek* is nevezni. Ugyanígy definiáljuk kettőnél több függvény kompozícióját is (*többszörösen összetett függvények*).

2-3. Példa: Legyenek $f$,$g$ : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := 1 + x^2$, $g(x) := \sin x$ . Akkor az ezekből képezett összetett függvényeket az alábbi formulák állítják elő: $(f \circ g)(x) = 1 + \sin^2 x$, és $(g \circ f)(x) = \sin(1 + x^2)$.

2-9. Definíció: Az $f : A \to B$ függvény *kölcsönösen egyértelmű* vagy *invertálható*, ha különböző $A$-beli elemekhez különböző $B$-beli elemeket rendel, azaz $f(x) = f(y)$ csak akkor teljesülhet, ha $x = y$. Ekkor az $f$ függvény *inverzének* azt az $f^{-1} : B \to A$ függvényt nevezzük, amelyre $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ és minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f^{-1}(f(x)) = x$.

Nyilván $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ , továbbá $(f^{-1})^{-1} = f$.

2-4. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := ax$ függvény (ahol $0 \neq a \in \mathbf{R}$ rögzített szám) kölcsönösen egyértelmű R-en, inverze: $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{a}$.

Általában, ha $f$ egy képlettel adott, akkor az inverz függvény helyettesítési értékét valamely $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ szám esetén úgy nyerjük, hogy az $f(x) = y$ egyenletből $x$-et kifejezzük.

Megjegyzés: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ típusú függvények esetén az invertálhatóságnak igen szemléletes jelentése van a függvény grafikonját tekintve. Könnyen látható, hogy egy invertálható függvény grafikonja olyan síkbeli ponthalmaz, mely nemcsak a függőleges vonal próbát, hanem a *vízszintes vonal próbát* is kielégíti, azaz a sík bármely vízszintes egyenesének legfeljebb egy közös pontja van a grafikonnal (ellenkező esetben ugyanaz a függvényérték több, különböző argumentumhoz is tartozna, ami ellentmond az invertálhatóság definíciójának.)

2-10. Definíció: Legyen $f : A \to B$ egy tetszőleges függvény, $C$ és $D$ két tetszőleges halmaz, melyre $C \subset \mathcal{D}_f \subset D \subset A$. Az $f$ függvény $C$-re való *leszűkítésén* (vagy *megszorításán*) azt az $f|_C$ szimbólummal jelölt függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya $C$, és minden $x \in C$-re $f|_C(x) = f(x)$ . Azt mondjuk továbbá, hogy a $g : D \to B$ függvény *kiterjesztése $f$-nek*, ha $f$ leszűkítése $g$-nek (akárhogy is van definiálva $g$ a $D \setminus \mathcal{D}_f$ halmazon).

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2$ előírással értelmezett függvény nem kölcsönösen egyértelmű $\mathbf{R}$-en, de az $\mathbf{R}_+ := [0, +\infty)$ részhalmazra leszűkítve már igen, és itt az inverze: $f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

## 2.2. Halmazok számossága

Véges halmazok esetében a halmazok számosságát kézenfekvő a halmaz elemszámával definiálni. Ily módon halmazokat lehet „összehasonlítani”. Ez a definíció nem működik végtelen halmazok esetén. Ekkor általánosabb definícióra van szükség.

2-11. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $A$ és $B$ halmazok *egyenlő számosságúak* vagy *ekvivalensek*, ha létezik olyan $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, melyre $\mathcal{D}_f = A$, és $\mathcal{R}_f = B$ . Ezt a tényt így jelöljük: $A \sim B$.

definícióban szereplő $f$ függvény általában nem egyértelmű. A definíció azonnali következménye a

2-5. Állítás: Tetszőleges $A$, $B$, $C$ halmazokra:
($a$) $A \sim A$,
($b$) ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$,
($c$) ha $A \sim B$ és $B \sim C$ , akkor $A \sim C$.

Bizonyítás:

A definícióban szereplő, megfelelő tulajdonságú leképezéseket kell keresni. Csak vázlatosan: ($a$) nyilván az $A \to A$ identikus leképezés megfelelő. ($b$) ha $f : A \to B$ ekvivalenciát létesít $A$ és $B$ közt, akkor $f^{-1}$ nyilván ekvivalenciát létesít $B$ és $A$ közt. ($c$) ha $f$ és $g$ ekvivalenciát létesítő leképezések $A$ és $B$ ill. $B$ és $C$ közt, akkor a $g \circ f$ összetett leképezés ekvivalenciát létesít $A$ és $C$ közt. $\square$

Nyilvánvaló, hogy két véges halmaz pontosan akkor egyenlő számosságú, ha elemeik száma egyenlő, továbbá egy véges halmaz sohasem lehet ekvivalens saját valódi részével. Végtelen halmazok esetén ez utóbbi már nem igaz. Meglepő módon, egy végtelen halmaz ekvivalens lehet saját valódi részével. Például a pozitív egész számok $\{1,2,3,4,...\}$ halmaza ekvivalens a pozitív páros számok $\{2,4,6,8,...\}$ halmazával, az ekvivalenciát létesítő leképezés pedig pl. az $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) := 2x$ függvény.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a számosság fogalmát magát nem definiáltuk, csak az *egyenlő számosság* fogalmát.

2-12. Definíció: Az $\mathbf{N}$-nel egyenlő számosságú halmazokat (melyek az előző állítás értelmében egymással is ekvivalensek) *megszámlálhatóan végtelen* halmazoknak nevezzük. A véges és a megszámlálhatóan végtelen halmazokat közös néven *megszámlálható* halmazoknak is nevezzük.

megszámlálható halmazokat még *sorozatba rendezhető* halmazoknak is nevezzük. Az elnevezés oka szemléletesen világos: ha $A$ megszámlálható, $f$ pedig $\mathbf{N}$-et (ill. véges esetben egy véges $\{1,2,3,...,n\}$ halmazt) $A$-ra képező kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor nyilván $A$ előáll $A = \{f(1),f(2),f(3),...\}$ véges vagy végtelen sorozat alakban.

A következő két állítás a megszámlálható halmazok alapvető tulajdonságait írja le:

2-6. Állítás: Ha $A$ megszámlálható, akkor minden $B \subset A$ részhalmaz is megszámlálható.

Bizonyítás:

Ha $A$ véges, vagy $A$ végtelen de $B$ véges halmaz, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $A$ és $B$ mindketten végtelen halmazok. Legyen $A = \{f(1),f(2),f(3),...\}$ sorozatba rendezett. Mivel $B \subset A$, ezért $B$-t az $A$-ból bizonyos elemek elhagyásával kapjuk, így $B = \{f(n_1),f(n_2),f(n_3),...\}$ alakú. Ekkor a $g : \mathbf{N} \to B$, $g(k) := n_k$ leképezés könnyen láthatóan ekvivalenciát létesít $\mathbf{N}$ és $B$ közt. $\square$

2-7. Állítás: Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.

**Bizonyítás:**

Legyenek $A_1 := \{a_{11},a_{12},a_{13},...\}$, $A_2 := \{a_{21},a_{22},a_{23},...\}$, $A_3 := \{a_{31},a_{32},a_{33},...\}$,... megszámlálható halmazok, és jelölje $A := \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Írjuk fel $A$ elemeit a következő, kétszeresen végtelen táblázatba:

$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \ldots$

$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad \ldots$

$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad \ldots$

...........

Ez a táblázat $A$ minden elemét tartalmazza, némelyeket esetleg többször is (ha az $A_1,A_2,...$ halmazok közül némelyeknek van közös elemük). Elég tehát belátni, hogy ez az esetlegesen bővebb halmaz még mindig megszámlálható. Rendezzük sorozatba e táblázat elemeit. A leszámlálást a bal felső elemmel kezdjük, majd azokat az elemeket vesszük, melyek indexeinek összege 2, ezután azokat, melyekre ez az összeg 3, és így tovább. A következő sorozatot nyerjük: $A = \{a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},...\}$, tehát $A$ valóban megszámlálható. □

**2-8. Következmény:** A racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza megszámlálható.

**Bizonyítás:**

Jelölje $A_1$ az 1 nevezőjű, $A_2$ a 2 nevezőjű, és így tovább, $A_k$ a $k$ nevezőjű törtek halmazát (ahol $k$ negatív egész is lehet). Ezen halmazok mindegyike megszámlálható, uniójuk pedig megegyezik $\mathbf{Q}$-val. Az előző állítás miatt így $\mathbf{Q}$ megszámlálható. □

Felmerül a kérdés, van-e egyáltalán nem megszámlálható halmaz. A következő állításból kiderül, hogy van, sőt, bizonyos értelemben lényegesen több van, mint megszámlálható:

**2-9. Állítás:** Tetszőleges $A$ halmaz esetén $A$ és a $2^A$ hatványhalmaz nem lehetnek egyenlő számosságúak.

**Bizonyítás:**

Indirekt tegyük fel, hogy van oly $f : A \to 2^A$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, mely ekvivalenciát létesít $A$ és $2^A$ közt. Definiáljuk a következő $B \subset A$ részhalmazt: $B := \{a \in A : \; x \notin f(x)$. Mivel $\mathcal{R}_f = 2^A$, azért van olyan $b \in A$, hogy $B = f(b)$. Vizsgáljuk meg, hogy $b$ eleme-e a $B$ halmaznak. Ha $b \in B$, akkor $b \in f(b)$, de $B$ definíciója szerint ekkor $b \notin f(b)$. Ez tehát nem fordulhat elő. Ugyanakkor, ha $b \notin B$, akkor $b \notin f(b)$. Ebből viszont, ugyancsak $B$ definíciója szerint $b \in B$ következik. Tehát az indirekt feltevésből az adódott, hogy sem $b \in B$, sem $b \notin B$ nem lehetséges. Ez az ellentmondás az állítást igazolja. $\square$

Következésképp pl. a $2^{\mathbf{N}}$ halmaz nem megszámlálható.

# 2. lecke

# Természetes és valós számok

## 2.3. Teljes indukció. Nevezetes azonosságok és egyenlőtlenségek

Sokszor előfordul, hogy egy állítást, egy tulajdonságot kell igazolni egy $A$ halmaz minden elemére. Ha $A$ véges, akkor az állítás elvben külön-külön bizonyítható. Ha $A$ megszámlálhatóan végtelen, ez az út már elvben sem járható. Ekkor alkalmazható a teljes indukció, mint bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő.

Tegyük fel, hogy valamely, $n$-től függő állítást igazolni kell az összes, $n = n_0$, $n = n_0 + 1$, $n = n_0 + 2$,... számra, ahol $n_0 \in \mathbf{N}$ valamely természetes szám.

1. lépés: Igazoljuk az állítást $n_0$-ra.

2. lépés: *Feltesszük*, hogy az állítás igaz valamely $n \geq n_0$-ra, ezt a feltevést (az ún. *indukciós feltevést*) felhasználva, igazoljuk az állítást $(n + 1)$-re. Másképp fogalmazva, igazoljuk, hogy *ha* az állítás igaz valamilyen $n_0$-nál nem kisebb természetes számra, akkor igaz a következő természetes számra is.

Ezzel az állítás minden $n \geq n_0$-ra igazolva lesz. Valóban, $n_0$-ra igaz (1. lépés), ezért $(n_0 + 1)$-re is igaz (a 2. lépés alapján): de akkor már $(n_0 + 2)$-re is igaz (ismét a 2. lépés alapján), és így tovább.

Megjegyzés: A módszerben a természetes számoknak az az alapvető tulajdonsága van „elrejtve”, mely szerint, ha egy $A \subset \mathbf{N}$ részhalmaz olyan tulajdonságú, hogy $1 \in A$ , és minden $n \in A$ esetén $(n + 1) \in A$ is igaz, akkor szükségképp $A = \mathbf{N}$. Ez a tulajdonság *Peano-axióma* néven ismert. Nem minden végtelen halmaz rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, így pl. $\mathbf{R}$ sem. Következésképp a teljes indukciós bizonyítás (a fenti formában) nem alkalmas pl. $\mathbf{R}$ minden elemére vonatkozó állítások igazolására.

A következőkben példákat mutatunk ilyen jellegű állításokra.

2-5. Példa: Minden $n \in \mathbf{N}$-re $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bizonyítás:

Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $n$-re igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Ekkor, az indukciós feltevést használva $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, tehát az állítás $(n+1)$-re is igaz. Ezzel az állítást teljes egészében igazoltuk. $\square$

A következő állítás hasonlóan igazolható:

**2-6. Példa:** Minden $n \in \mathbf{N}$-re $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**2-13. Definíció:** Jelölje $n \in \mathbf{N}$ esetén $n!$ ($n$ faktoriális) az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ szorzatot. *Definiáljuk* $0!$-t 1-nek, azaz $0! := 1$. Ezek után tetszőleges $0 \le k \le n$ egészre legyen $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

A fenti számokat *binomiális együtthatóknak* nevezzük (a szimbólum olvasása: „$n$ alatt $k$”). Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy:

(*a*)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

(*b*)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

(*c*)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(*d*)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Az állítás ($d$) pontjának ismételt felhasználásával látható, hogy a binomiális együtthatók egy olyan háromszög alakú (végtelen) táblázatba rendezhetők, ahol minden elem a felette levő két elem összege:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} & & \end{array}$$

azaz:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & \end{array}$$

(*Pascal-háromszög*). Ezek felhasználásával, a teljes indukció módszerével könnyen igazolható a következő fontos állítás:

**2-10. Tétel:** (binomiális tétel). Tetszőleges $a,b \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bizonyítás:

Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbf{N}$-re igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Az indukciós feltevést használva:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n\right) =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}ab^n +$$

$$+ \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

A jobb oldalon most felhasználjuk a binomiális együtthatóknak az előző állítás $(a)$ és $(d)$ pontjában leírt tulajdonságait:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

tehát az állítás $(n+1)$-re is igaz, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Megjegyzés: Az állítás egyszerűen igazolható kombinatorikus úton is. A bal oldal ui. egy $n$-tényezős szorzat, mindegyik tényező $(a+b)$. Elvégezve a szorzást (minden tagot szorozva minden taggal), csoportosítsuk a szorzatokat $a$ növekvő hatványai szerint. Akkor az $a^{n-k}b^k$ alakú szorzatok száma azzal a számmal egyenlő, ahányféleképp $n$ különböző elemből $k$ különböző elemet a sorrend figyelembevétele nélkül ki tudunk választani (ismétlés nélküli kombináció). Ez pedig, mint ismert, épp az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható. Ez lesz tehát a jobb oldalon $a^{n-k}b^k$ együtthatója.

**2-11. Következmény:** . Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

**Bizonyítás:**

Alkalmazzuk a binomiális tételt az $a := b := 1$, ill. az $a := 1$ és $b := -1$ szereposztással. $\square$

Most már igazolhatjuk az előző szakaszban említett, a véges halmazok számosságára vonatkozó eredményt:

**2-12. Következmény:** . Ha $A$ egy $n$-elemű véges halmaz ($n \in \mathbf{N}$), akkor a $2^A$ hatványhalmaz elemeinek száma $2^n$.

**Bizonyítás:**

Kombinatorikai meggondolásokkal könnyen látható, hogy az egyelemű részhalmazok száma $\binom{n}{1}$, a kételeműeké $\binom{n}{2}$, és így tovább, általában a $k$-elemű részhalmazok száma $\binom{n}{k}$. Végül egyetlen zérus elemszámú részhalmaz van, az üres halmaz. A részhalmazok számát összegezve, az előző következmény alapján az állítás már adódik. $\square$

**2-13. Állítás:** (Bernoulli-egyenlőtlenségek).
($a$) Minden $x \geq -1$ és $n \in \mathbf{N}$ számra $(1+x)^n \geq 1+nx$
($b$) Tetszőleges $x,y \geq 0$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén $(x+y)^n \geq x^n + nx^{n-1}y$.

Bizonyítás:

Az első egyenlőtlenség $n = 1$ mellett nyilván igaz. Feltéve, hogy valamely $n \in \mathbf{N}$-re igaz, vizsgáljuk az egyenlőtlenséget $(n+1)$-re. Az indukciós feltevést felhasználva:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

(mert $x \geq -1$ miatt $1 + x \geq 0$), tehát az állítás $(n+1)$-re is igaz. Ezzel az első egyenlőtlenséget igazoltuk. A második egyenlőtlenség innen már következik: ez ui. $x = 0$ esetén nyilvánvaló, ha pedig $x > 0$, akkor

$$(x+y)^n = x^n(1 + \frac{y}{x})^n \geq x^n(1 + n\frac{y}{x}) = x^n + nx^{n-1}y.$$

□

Megjegyzés: Az egyenlőtlenségek $x,y \geq 0$ esetén a binomiális tételből egyenesen adódnak, ha a jobb oldalról az első két tagot követő többi (nemnegatív!) tagot elhagyjuk.

A Bernoulli-egyenlőtlenségből teljes indukcióval levezethető a következő, alapvető fontosságú egyenlőtlenség:

2-14. Tétel: (számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség). Legyenek $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ tetszőleges nemnegatív számok ($n \in \mathbf{N}$ ). Akkor érvényes a következő becslés:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Megjegyzés: Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést az $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ számok *mértani közepének* nevezzük, a jobb oldalon pedig ezen számok *számtani közepe* áll. Az egyenlőtlenség nyilván ekvivalens az $a_1 a_2 ... a_n \leq \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n$ egyenlőtlenséggel.

Bizonyítás:

Feltehető, hogy az $a_k$ számok nagyság szerint rendezettek: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Jelölje a rövidség kedvéért $M_n := a_1 a_2 ... a_n$, $S_n := \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, akkor a bizonyítandó állítás: $M_n \le S_n^n$ . Ez $n=1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbf{N}$-re igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Az indukciós feltevést használva:

$$M_{n+1} = M_n \cdot a_{n+1} \le S_n^n \cdot a_{n+1} = S_n^{n+1} + S_n^n (a_{n+1} - S_n) =$$

$$= S_n^{n+1} + (n+1) S_n^n \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1}.$$

Alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtleséget $x := S_n$, $y := \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1}$ mellett $(n+1)$-re. Ez megtehető, mert a rendezettség miatt $a_{n+1} - S_n = a_{n+1} - \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge 0$. Innen azt kapjuk, hogy:

$$M_{n+1} \le \left( S_n + \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1} \right)^{n+1} = \left( \frac{(n+1)S_n + a_{n+1} - S_n}{n+1} \right)^{n+1} =$$

$$= \left( \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} = S_{n+1}^{n+1},$$

amivel az állítást $(n+1)$-re is igazoltuk. □

**2-15. Következmény:** (mértani-harmonikus közepekre vonatkozó egyenlőtlenség). Legyenek $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ tetszőleges pozitív számok $(n \in \mathbf{N})$. Akkor érvényes a következő becslés:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \ .$$

(A bal oldalon álló kifejezést az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok *harmonikus közepének* nevezzük.)

Bizonyítás:

Alkalmazzuk az előző tételt speciálisan az $1/a_1, 1/a_2, ..., 1/a_n$ számokra.. $\square$

**2-16. Tétel:** (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség). Legyenek $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$ tetszőleges valós számok ($n \in \mathbf{N}$). Akkor

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

vagy röviden:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Bizonyítás:

A rövidség kedvéért legyenenek az $a$, $b$ nemnegatív számok olyanok, hogy $a^2 := \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ és $b^2 := \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Ha $a$ vagy $b$ bármelyike zérus, akkor az állítás a triviális $0 = 0$ egyenlőségre egyszerűsödik. Feltehető tehát, hogy $a > 0$ és $b > 0$. Induljunk ki abból, hogy tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ számra nyilván $\sum_{k=1}^{n}(a_k - tb_k)^2 \geq 0$, ahonnan:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - tb_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 - 2ta_k b_k + t^2 b_k^2) = a^2 - 2t\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2 b^2 \geq 0.$$

Speciálisan ez a $t := a/b$ választás mellett is igaz, innen pedig:

$$a^2 - 2\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \frac{a^2}{b^2} b^2 \geq 0.$$

Ezt rendezve a $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq ab$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami épp a bizonyítandó állítással ekvivalens. $\square$

**Megjegyzés:** A bizonyítás technikájából az is világos, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a $\sum_{k=1}^{n}(a_k - tb_k)^2$ összeg minden tagja 0, azaz az $a_k$ és a $b_k$ számok mind arányosak, éspedig ugyanazzal az arányossági tényezővel.

## 2.4. Valós számok és számhalmazok

A számfogalom fokozatos bővítése röviden a következőkben foglalható össze. $\mathbf{N}$-ből kiindulva, először a 0 számot definiáljuk, és a $\{0\} \cup \mathbf{N}$ halmazra kiterjesztjük az összeadást $0 + n := n$ előírással minden $n \in \mathbf{N}$-re. Ezután definiáljuk a negatív egész számokat és kiterjesztjük rájuk az összeadást a szokásos módon. Így nyerjük a $\mathbf{Z}$ halmazt. Most definiálhatjuk a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmazát. Erre kiterjesztve az összeadást és a szorzást, kiderül, hogy $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$ elemeiből kiindulva a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza egy, az eddigieknél bonyolultabb eljárással nyerhető, melyet nem részletezünk.

Ehelyett a valós számok $\mathbf{R}$ halmazát, rajta az összeadás és szorzás műveletét valamint a „$<$" rendezési relációt adottnak tételezzük fel, és elfogadjuk a következő két állítást:

**2-17. Állítás:** $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, és bármely két különböző $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$ valós szám között van $p \in \mathbf{Q}$ racionális szám, melyre tehát $a < p < b$ teljesül.

**2-18. Állítás:** (Cantor-axióma vagy Cantor-féle közöspont tétel). Legyen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ korlátos és zárt $\mathbf{R}$-beli intervallumok egymásba ágyazott tetszőleges sorozata. Akkor ezen intervallumsorozatnak legalább egy közös eleme van, azaz $\cap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$.

Itt használtuk az intervallumok szokásos definícióját, melyeket az alábbiakban foglalunk össze. Ha $a,b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ tetszőleges számok, akkor a továbbiakban jelölje:

$(a,b) := \{x \in \mathbf{R} : \ a < x < b\}$ (nyílt intervallum),

$[a,b] := \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x \leq b\}$ (zárt intervallum),

$(a,b] := \{x \in \mathbf{R} : \ a < x \leq b\}$ (alulról nyílt, felülről zárt intervallum),

$[a,b) := \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x < b\}$ (alulról zárt, felülről nyílt intervallum),

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : \ a < x\}$ (félig végtelen, nyílt intervallumok),

$(-\infty,a) := \{x \in \mathbf{R}: \ x < a\}$,

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R}: \ a \leq x\}$ (félig végtelen, zárt intervallumok),

$(-\infty,a] := \{x \in \mathbf{R}: \ x \leq a\}$,

és néha $\mathbf{R}$-et $(-\infty, +\infty)$-nel is jelöljük. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a $+\infty$, $-\infty$ szimbólumok *nem számok* (nincsenek rájuk a műveletek kiterjesztve), hanem pusztán kényelmes *jelölések*!

Megjegyzés:

- Az előző állítást ismételten alkalmazva kapjuk, hogy bármely két különböző valós szám közt *végtelen sok* racionális szám van. Ezt szemléletesen úgy fejezzük ki, hogy a racionális számok a valós számok egy *mindenütt sűrű* részhalmazát alkotják.
- Az, hogy a Cantor-axiómát tételnek avagy axiómának tekintjük, attól függ, hogy a valós számoknak (egymással ekvivalens) többféle lehetséges felépítése közül melyiket választjuk. Mi a későbbiekben axiómának tekintjük.

A Cantor-axióma mindegyik feltétele lényeges. Példákkal mutatjuk meg, hogy bármelyik feltétel elhagyása esetén az állítás már általában nem igaz:

$(a)$ Mindhárom feltétel teljesül.

Legyen $I_k := \left[0,\frac{1}{k}\right]$ $(k \in \mathbf{N})$. Ekkor közvetlenül látható, hogy $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \{0\}$ (egyelemű halmaz).

$(b)$ Az intervallumok nem végesek.

Legyen $I_k := [k, +\infty]$ $(k \in \mathbf{N})$. Akkor $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.

$(c)$ Az intervallumok nem zártak.

Legyen $I_k := \left(0,\frac{1}{k}\right)$ $(k \in \mathbf{N})$. Akkor $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.

$(d)$ Az állítást nem $\mathbf{R}$-ben tekintjük.

Legyen $I_1 := [1.4,1.5]$, $I_2 := [1.41,1.42]$, $I_3 := [1.414,1.415]$, és így tovább, a $k$-adik intervallum bal végpontja legyen a $\sqrt{2}$ szám $k$ tizedesjegy pontossággal, a jobb végpontja pedig ettől $10^{-k}$-nal nagyobb. Könnyen látható, hogy ezen intervallumsorozat kielégíti a Cantor-axióma feltételeit, az intervallumok közös pontja pedig az egyetlen $\sqrt{2}$ szám. Következésképpen, ha $\mathbf{R}$ helyett $\mathbf{Q}$-ban tekintjük ezen intervallumokat, akkor a közös rész üres. Az állítás tehát $\mathbf{Q}$-ban nem igaz. Szemléletesen szólva, az állítás azt jelenti, hogy $\mathbf{R}$-ben nincsenek „lyukak". Ez a tulajdonsága $\mathbf{Q}$-nak nincs meg.

**2-14. Definíció:** Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbf{R}$ számhalmaz *felülről korlátos*, ha van olyan $C \in \mathbf{R}$ szám, hogy minden $x \in A$-ra teljesül, hogy $x \leq C$. Ekkor az ilyen $C$ számokat az $A$ halmaz *felső korlátjainak* nevezzük. Hasonlóan, ha van olyan $c \in \mathbf{R}$ szám, hogy minden $x \in A$-ra $x \geq c$ teljesül, akkor az $A$ halmazt *alulról korlátosnak* nevezzük, az ilyen tulajdonságú $c$ számokat pedig az $A$ halmaz *alsó korlátjainak* hívjuk. Ha egy halmaz felülről is és alulról is korlátos, akkor röviden csak *korlátosnak* nevezzük. Ekkor a halmaz lefedhető egy véges hosszúságú intervallummal.

A valós számokat alapvetően jellemzi a következő tétel, melyet bizonyítás nélkül mondunk ki (a tétel egyébként a Cantor-axiómán alapul):

**2-19. Tétel:** . Minden nemüres felülről korlátos $A$ halmaznak van legkisebb felső korlátja. Ezt az $A$ halmaz *szuprémumának* nevezzük, és $\sup A$-val jelöljük. Hasonlóan, minden nemüres alulról korlátos $A$ halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. Ezt az $A$ halmaz *infimumának* nevezzük, és $\inf A$-val jelöljük.

A szuprémum és infimum esetleg maguk is a szóbanforgó halmazhoz tartoznak, de ez nem szükségszerű. Pl. a $(0,1]$ félig nyílt intervallum infimuma 0 (ami nem tartozik hozzá e halmazhoz), szuprémuma pedig 1 (ami hozzátartozik a halmazhoz). A szuprémum és az infimum a maximum ill. minimum fogalmának bizonyos irányú általánosításai abban az értelemben, hogy ha egy halmaznak van legkisebb (legnagyobb) eleme, akkor ez egyúttal a szóbanforgó halmaz infimuma (szuprémuma) is. Ámde míg minimális (maximális) elem nem feltétlen létezik – a $(0,1)$ nyílt intervallumnak pl. sem minimális, sem maximális eleme nincs –, addig a fenti tétel értelmében infimum (szuprémum) mindig létezik, amennyiben a halmaz alulról (felülről) korlátos.

Könnyű látni azt is, hogy a tétel érvényét veszti, ha $\mathbf{R}$ helyett például $\mathbf{Q}$-beli halmazokat vizsgálunk. Így pl. az $\{x \in \mathbf{Q} :\ 0 < x^2 < 2\}$ halmaz korlátos, de $\mathbf{Q}$-ban nincs legkisebb felső korlátja. Ilyen értelemben ez a tétel is a valós számok hézagmentességeként interpretálható.

Megjegyzés: Ha az $A \subset \mathbf{R}$ számhalmaz nem korlátos felülről (alulról), akkor azt mondjuk, hogy $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$ ).

A hatványhalmaz példáján már láttuk, hogy nem mindegyik végtelen halmaz megszámlálható. Most erre konkrét példát is adunk. Bebizonyítjuk, hogy $\mathbf{R}$ nem megszámlálható.

2-20. Állítás: A valós számok $\mathbf{R}$ halmaza nem megszámlálható.

Bizonyítás:

Elég megmutatni, hogy az $\mathbf{R}$-nél szűkebb $(0,1)$ intervallum sem megszámlálható (ha ui. $\mathbf{R}$ megszámlálható lenne, akkor a szűkebb $(0,1)$ is az volna). Indirekt, tegyük fel, hogy a $(0,1)$ halmaz megszámlálható, ezért sorozatba rendezhető: $(0,1) = \{a_1,a_2,a_3,...\}$. Írjuk fel mindegyik $a_k$-t végtelen tizedestört alakban:

$a_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}...,$

$a_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}...,$

$a_3 = 0.x_{31}x_{32}x_{33}...,$

........,

ahol tehát $x_{kj}$ jelöli az $a_k$ szám $j$-edik tizedesjegyét (az egyértelműség kedvéért a végtelen, csupa 9-esből álló szakaszokat kizárjuk, helyettük a megfelelő véges tizedestört alakot használjuk, így az ilyen számok vége csupa 0-ból áll). Tekintsük most az $a := 0.y_1y_2y_3...$ számot, ahol az $y_j$ tizedesjegyek olyan, 0-tól és 9-től különböző számok, melyekre teljesül, hogy $y_j \neq x_{jj}$, de egyébként tetszőlegesek. Akkor egyrészt nyilván $a \in (0,1)$, másrészt viszont a konstrukció következtében az $a$ szám mindegyik $a_k$-tól különbözik (ui. legalább a $k$-adik tizedesjegyük nem azonos). Ez ellentmond az indirekt feltevésnek, miszerint az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ megszámlálható halmaz egyenlő volna a teljes $(0,1)$ intervallummal. Ez az ellentmondás az állítást igazolja. $\square$

Megjegyzés: A $(0,1)$ intervallum egyenlő számosságú a teljes $\mathbf{R}$ halmazzal, az

$$f : (0,1) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \operatorname{tg}\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

leképezés pedig ekvivalenciát létesít $(0,1)$ és $\mathbf{R}$ között.

Az $\mathbf{R}$-rel egyenlő számosságú halmazokat *kontinuum számosságú* halmazoknak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ennél „nagyobb” számosság is van. Így pl. a $2^{\mathbf{R}}$ halmaz se nem megszámlálható, se nem kontinuum számosságú.

# 3. lecke

## Ellenőrző kérdések és feladatok

## 2.5. Feladatok

**2-1. Feladat:** Mivel egyenlő $2^{\emptyset}$? És $2^{2^{\emptyset}}$? És $2^{2^{2^{\emptyset}}}$ ?

Megoldás: itt

**2-2. Feladat:** Igazoljuk, hogy tetszőleges $A$, $B$ halmazokra $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Megoldás: itt

**2-3. Feladat:** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A$, $B$ halmazokra $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$.

Megoldás: itt

**2-4. Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy $X$ alaphalmaz tetszőleges részhalmazai, akkor

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

és

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

Megoldás: itt

**2-5. Feladat:** Konstruáljunk ekvivalenciát létrehozó leképezéseket $(a)$ az $\mathbf{N}$ és a $\mathbf{Z}$ halmazok között; $(b)$ az $\mathbf{N}$ és a $\mathbf{Z}^2$ halmaz között.

Megoldás: itt

**2-6. Feladat:** Mutassuk meg, hogy az irracionális számok halmaza nem megszámlálható.

Megoldás: itt

**2-7. Feladat:** Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2 + 3x + 2$. Milyen számhalmazra kell $f$-et leszűkíteni úgy, hogy az inverz függvény biztosan létezzék? Állítsuk elő az inverzet.

Megoldás: itt

**2-8. Feladat:** Határozzuk meg az $A := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ számhalmaz infimumát, szuprémumát, minimumát és maximumát (amennyiben léteznek).

Megoldás: itt

**2-9. Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

Megoldás: itt

**2-10. Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

Megoldás: itt

---

**2-11. Feladat:** Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$-re:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Megoldás: itt

---

**2-12. Feladat:** A szokásos teljes indukciós módszerrel megmutatható, hogy $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1) + 1$ $(n \in \mathbf{N})$. Valóban, ha ez az egyenlőség valamely $n$-re igaz, akkor $(n+1)$-re:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n + (2n + 2) = n(n + 1) + 1 + 2n + 2 = (n + 1)(n + 2) + 1.$$

Ugyanakkor a bal oldal mindig páros, a jobb oldal viszont páratlan, ami nem lehetséges! Hol a hiba a gondolatmenetben?

Megoldás: itt

---

2-13. Feladat: A Hotel Aleph Null forgóajtaja kivágódik: vendég be, s lihegve szól:
- Hány szobájuk van?
- Hát van egypár. Egészen pontosan, megszámlálhatóan végtelen.
- Ember! Azt kérdem, hány üres szobájuk van?
- Vagy úgy! Jelenleg egyetlenegy.
- Az baj, mert nekem kettő kellene. Egy nekem, egy az anyósomnak.
- Nem probléma, uram! Mindent meg lehet oldani!

És meg is tette. Szólt a 2. szobában levő vendégnek, hogy költözzön át a 3. szobába, a 3. szobában levő vendéget átirányította a 4. szobába, és így tovább. Így a 2. szoba felszabadult. Ide, és az eredetileg is üres 1. szobába elhelyezte az új vendégeket.
De hát eredetileg csak egy üres szoba volt! Hol van itt az ellentmondás?

Megoldás: itt

2-14. Feladat: Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) := \dfrac{\sqrt{4x+3}}{3x-2}$ képlettel adott függvény értelmezhető.

Megoldás: itt

2-15. Feladat: Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) := \dfrac{\log(2x+9)}{2-\sqrt{6-|x|}}$ képlettel adott függvény értelmezhető.

Megoldás: itt

**2-16. Feladat:** Tekintsük az $f(x) := x^2 + 4x + 4$ formulával értelmezett függvényt. Szűkítsük le a függvényt egy minél tágabb halmazra úgy, hogy a leszűkítés kölcsönösen egyértelmű legyen. Határozzuk meg ezen leszűkített függvény inverzét. Adjuk meg az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét is.

Megoldás: itt

---

**2-17. Feladat:** Adjuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési utasítását, ha $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ és $g(x) = 1 - \sqrt{x}$.

Megoldás: itt

---

**2-18. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := (4x+1)^3$ képletű függvény inverzének hozzárendelési utasítását (azaz a képletét).

Megoldás: itt

---

**2-1 Megoldás:**

$$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

$$2^{2^{\emptyset}} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

$$2^{2^{2^{\emptyset}}} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$$

**2-2 Megoldás:**

Legyen $x \in A \setminus B$ tetszőleges, akkor $x \in A$ , de $x \notin B$, ezért $x \in \overline{B}$, azaz $x \in A \cap \overline{B}$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \setminus B \subset A \cap \overline{B}$.

Megfordítva, legyen $x \in A \cap \overline{B}$ tetszőleges, akkor $x \in A$ és $x \in \overline{B}$, ezért $x \notin B$, azaz $x \in A \setminus B$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \cap \overline{B} \subset A \setminus B$ is teljesül. Következésképp $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

**2-3 Megoldás:**

Felhasználva a 2. feladat eredményét és a halmazműveletekre vonatkozó azonosságokat:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}} = A \cap (\overline{\overline{A}} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B,$$

és hasonlóan:

$$B \setminus (B \setminus A) = B \cap \overline{\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}} = B \cap (\overline{\overline{B}} \cup A) = (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) = B \cap A.$$

**2-4 Megoldás:**

Igazoljuk az $\overline{\cup_{j=1}^n A_j} = \cap_{j=1}^n \overline{A_j}$ egyenlőséget. Legyen $x \in \overline{\cup_{j=1}^n A_j}$ tetszőleges, akkor $x$ nincs benne az $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$ halmazok uniójában, tehát egyik $A_k$-ban sincs benne. Ekkor viszont benne van mindegyik $A_k$ komplementumában, így azok metszetében is. Ezzel megmutattuk, hogy $\overline{\cup_{j=1}^n A_j} \subset \cap_{j=1}^n \overline{A_j}$.

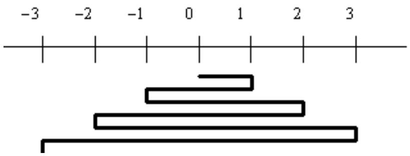
A fordított tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy most $x \in \cap_{j=1}^n \overline{A_j}$ tetszőleges. Akkor $x$ mindegyik $A_k$ komplementumában benne van, így egyik $A_k$-ban sincs benne, ezért az uniójuknak sem eleme: benne van tehát az unió komplementumában. Így $\cap_{j=1}^n \overline{A_j} \subset \overline{\cup_{j=1}^n A_j}$. Következésképp $\overline{\cup_{j=1}^n A_j} = \cap_{j=1}^n \overline{A_j}$.

A második egyenlőséget hasonlóan is bizonyíthatjuk, de ahelyett felhasználhatjuk a most igazolt egyenlőséget speciálisan az $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ részhalmazokra. Eszerint

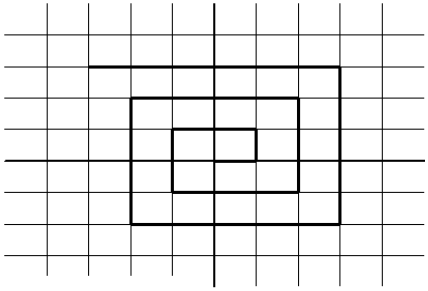
$$\cap_{j=1}^n A_j = \cap_{j=1}^n \overline{\overline{A_j}} = \overline{\cup_{j=1}^n \overline{A_j}}.$$

Komplementumot véve, innen $\overline{\cap_{j=1}^n A_j} = \cup_{j=1}^n \overline{A_j}$.

Megjegyzés: A most bizonyított állítás egyik legegyszerűbb konkrét példája ($n = 2$ mellett) a következő. Jelölje $A$ az autótulajdonosok halmazát, $B$ pedig a budapestiekét. Akkor az $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ egyenlőség jelentése az, hogy pontosan azok *nem* tartoznak a budapesti autótulajdonosok halmazába, akik nem budapestiek, *vagy* nincs autójuk.




5. ábra. Az egész számok megszámlálhatósága



6. ábra. Az egész koordinátájú rácspontok megszámlálhatósága

**2-5 Megoldás:**

($a$) Rendezzük sorba $\mathbf{Z}$ elemeit az ábrán látható séma szerint, és minden $n$ természetes számhoz rendeljük hozzá azt az egész számot, melyet az $n$-edik lépésben érintünk. Ezzel könnyen láthatóan ekvivalenciát létesítettünk $\mathbf{N}$ és $\mathbf{Z}$ között.

($b$) Rendezzük sorba $\mathbf{Z}^2$ elemeit (rácspontok!) az ábrán látható séma szerint. Minden $n$ természetes számhoz rendeljük hozzá azt a rácspontot, melyet az $n$-edik lépésben érintünk. Ezzel könnyen láthatóan ekvivalenciát létesítettünk $\mathbf{N}$ és $\mathbf{Z}^2$ között.

2-6 **Megoldás:**

Jelölje $\mathbf{Q}^*$ az irracionális számok halmazát. Akkor $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^* = \mathbf{R}$.

Ha $\mathbf{Q}^*$ megszámlálható lenne, akkor $\mathbf{Q}$ megszámlálhatósága miatt kettőjük uniója is megszámlálható lenne, ami ellentmond annak, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható.

**2-7 Megoldás:**

Legyen $y$ rögzített szám, tekintsük az $y = x^2 + 3x + 2$ egyenletet. Ha $y > -\frac{1}{4}$, akkor két megoldás is van:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \quad \text{és} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{1 + 4y}}{2},$$

melyek szimmetrikus helyzetűek a $-\frac{3}{2}$ helyre. A függvény tehát nem kölcsönösen egyértelmű, de leszűkítve akár a $[-\frac{3}{2}, +\infty)$, akár a $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ félegyenesekre, a leszűkített függvény már kölcsönösen egyértelmű.

Az inverz formulája az előbbi esetben $f^{-1}(y) = \frac{-3+\sqrt{1+4y}}{2}$, az utóbbi esetben $f^{-1}(y) = \frac{-3-\sqrt{1+4y}}{2}$.

2-8 **Megoldás:**

inf $A = 0$, sup $A = 1$, min $A$ nem létezik, max $A = 1$.

**2-9 Megoldás:**

$$2+4+6+\ldots+2n = 2\cdot(1+2+3+\ldots+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

2-10 **Megoldás:**

Felhasználva az 2-9 feladat eredményét:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = (1 + 2 + 3 + ... + 2n) - (2 + 4 + 6 + ... + 2n) =$$

$$= \frac{2n(2n + 1)}{2} - n(n + 1) = n^2.$$

2-11 **Megoldás:**

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvaló. Feltéve, hogy valamely $n \geq 1$ egészre igaz, vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Azt kell igazolni, hogy:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+3-1}{2n+3} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Felhasználva az indukciós feltevést:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{2n+1-1}{2(2n+1)} + + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

2-12 **Megoldás:**

A hiba ott van, hogy az állítás *már* $n = 1$*-re sem igaz, amit nem ellenőriztünk*! Egyébként a leírt okfejtés hibátlan: ha az állítás valamely $n$-re igaz *lenne*, akkor $(n+1)$-re is igaz *lenne*. Ámde az állítás semmilyen $n$-re nem igaz.

2-13 **Megoldás:**

Nincs ellentmondás! A feladat a végtelen halmazoknak egy szokatlan tulajdonságáról szól, hogy a végtelen halmazok ekvivalensek lehetnek saját valódi részhalmazukkal. Az ellentmondás látszatát a feladat (egyébként abszurd) szövegezése adja, ami egyfajta „megmaradási tételt” sugall a valós élet tapasztalatai alapján. Ilyenfajta „megmaradási tételek” azonban végtelen halmazokra nem vonatkoznak.

2-14 **Megoldás:**

Ha egy függvény esetében csak a hozzárendelési utasítást adják meg, akkor mindig felvetődik az a kérdés, mi a legbővebb halmaz, melyen értelmezhető a függvény. Másszóval, meg kell tennünk a szükséges kikötéseket, jelen esetben kettőt. Egyiket a négyzetgyök miatt, hiszen csak nemnegatív számoknak létezik négyzetgyöke, másikat az osztás miatt, hiszen $0$-val nem lehet osztani. Írjuk fel ezeket a kikötéseket képlettel, majd rendezzük ezeket a kikötéseket a változóra. Végül határozzuk meg azt a halmazt, melynek elemei mindegyik kikötésnek eleget tesznek.

A négyzetgyök miatti kikötés: $4x + 3 \geq 0$

Rendezzük ezt $x$-re.

$4x \geq -3$

$x \geq -\dfrac{3}{4}$

A nevező miatti kikötés: $3x - 2 \neq 0$

Ezt is rendezzük $x$-re.

$3x \neq 2$

$x \neq \dfrac{2}{3}$

A függvény tehát a változó azon értékeire értelmezhető, melyekre $x \geq -\dfrac{3}{4}$ és $x \neq \dfrac{2}{3}$.

A legbővebb értelmezési tartomány tehát az alábbi módon írható fel:

$D_f = \left[-\dfrac{3}{4},\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}.$

**2-15 Megoldás:**

Most több kikötést kell tenni az argumentumra, hogy a formula értelmes legyen. Menjünk sorba a kikötéseken.

Logaritmus miatti kikötés: $2x + 9 > 0$, amiből $x > -\dfrac{9}{2}$ következik.

Négyzetgyök miatti kikötés: $6 - |x| \geq 0$, amiből $|x| \leq 6$ következik. Ezt azonban még tovább kell alakítanunk. Ez az egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül, ha $-6 \leq x \leq 6$.

Nevező miatti kikötés: $2 - \sqrt{6 - |x|} \neq 0$, amiből $\sqrt{6 - |x|} \neq 2$.

Mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk.

$6 - |x| \neq 4$.

Ebből $|x| \neq 2$, azaz $x \neq \pm 2$.

Miután megtettük a kikötéseket, meg kell keresnünk azt a halmazt, melynek elemei mindegyik kikötésnek eleget tesznek. Ehhez csoportosítsuk a kikötéseket.

Lehetnek olyan kikötések, amelyek alulról korlátozzák $x$ értékét. Most két ilyen kikötésünk van, egyrészt $-\dfrac{9}{2} < x$, másrészt $-6 \leq x$. Ki kell választanunk ezek közül az erősebbet, amelynek teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is. Most a $-\dfrac{9}{2} < x$ az erősebb, hiszen ha ez teljesül akkor teljesül az $-6 \leq x$ kikötés is.

Lehet olyan kikötés, ami felülről korlátozza $x$ értékét. Ilyen most csak egy van, $x \leq 6$. Ha több ilyen kikötésünk lenne, akkor természetesen itt is ki kellene választanunk a legerősebbet.

Valamint lehet kizáró kikötés. Ilyen most az $x \neq \pm 2$.

Ezek után már egyenlőtlenségekkel könnyű megadni a függvény legbővebb értelmezési tartományát.

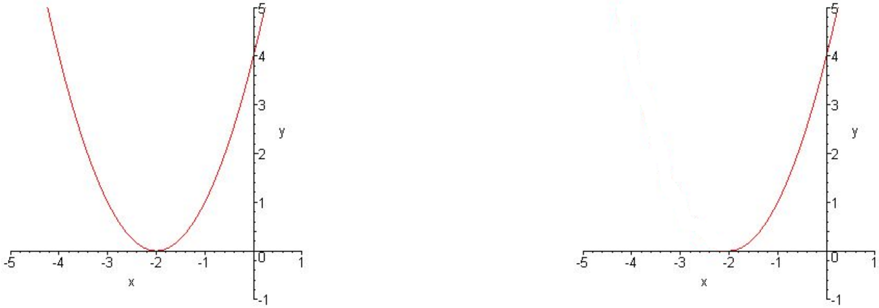
Annak kell teljesülni, hogy $-\dfrac{9}{2} < x \leq 6$ és $x \neq \pm 2$, azaz:

$$D_f = \left(-\frac{9}{2}, 6\right] \setminus \{\pm 2\}.$$

## 2-16 Megoldás:

**Megoldás:** Ha teljes **R**-en értelmezzük a függvényt, akkor nem kölcsönösen egyértelmű, hisz például $f(-3) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1$ és $f(-1) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 4 = 1$, azaz léteznek olyan különböző argumentumok, amelyekre ugyanazt az értéket veszi fel a függvény, s ezért leszűkítés nélkül nem invertálható.

A megfelelő leszűkítés megkereséséhez ábrázoljuk a függvényt, előtte azonban alakítsuk át a hozzárendelési utasítását. Könnyen felismerhető, hogy $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Ebből látható, hogy a függvény grafikonja egy olyan parabola, melyet az $x^2$ függvény grafikonjából $x$ tengellyel párhuzamos, negatív irányú, 2 egységgel történő eltolással kapunk.




7. ábra. $f(x) := x^2 + 4x + 4$ és annak leszűkítése

Az is látható az ábráról, hogy ha leszűkítjük a függvényt az $x \geq -2$ halmazra, akkor ezen leszűkítésen a függvény szigorúan monoton növő lesz, tehát kölcsönösen egyértelmű. (Lényegében csak a parabola felét vesszük.) Ennél kevésbé nem szűkíthetünk a függvényen, mert akkor már lennének a grafikonnak olyan pontjai, melyek azonos magasságban helyezkednének el, ami azt jelenti, a függvény nem kölcsönösen egyértelmű. Egy megfelelő leszűkítés tehát a következő:

$g(x) := x^2 + 4x + 4 \quad$ és $\mathcal{D}_g := [-2,\infty)$

Ezen $g$ függvénynek határozzuk meg az inverzét. Ehhez írjunk a $g(x)$ helyére a hozzárendelési utasításban $y$-t:

$y = x^2 + 4x + 4,$

és a kapott egyenletet oldjuk meg $x$-re. A jobb oldalt alakítsuk át:

$y = (x + 2)^2$

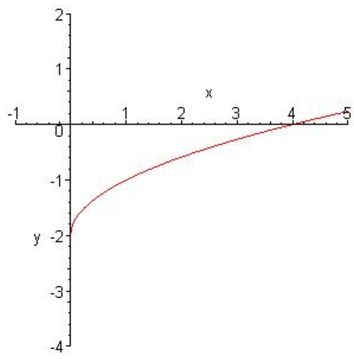
Mivel a leszűkített függvény értelmezési tartománya lesz az inverz értékkészlete, azért $x \geq -2$. Ebből következően $x + 2 \geq 0$, tehát ha mindkét oldalból gyököt vonunk, nincs szükség abszolút értékre. A következőt kapjuk:

$\sqrt{y} = x + 2$, ahonnan $x = \sqrt{y} - 2$.

Ez lesz az inverz függvény helyettesítési értéke az $y$ helyen. A $g$ inverzének hozzárendelési utasítása tehát ez: $g^{-1}(y) := \sqrt{y} - 2$. Ebben a formalizmusban az inverz függvény argumentumát jelöltük $y$-nal. Semmi akadálya, hogy az argumentumot most is $x$-szel jelöljük, ekkor az inverz függvény képlete:

$g^{-1}(x) := \sqrt{x} - 2.$

A négyzetgyök miatt ez a függvény csak a nem negatív számokon van értelmezve, így $\mathcal{D}_{g^{-1}} = [0,\infty)$. Továbbá az inverz értékkészlete épp a $g$ függvény értelmezési tartománya: $\mathcal{R}_{g^{-1}} = [-2,\infty)$




8. ábra. A $g^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$ inverz függvény

**2-17 Megoldás:**

Az $f \circ g$ függvény azt jelenti, hogy először a $g$ hozzárendelést hajtjuk végre, majd a kapott értékből indulva végrehajtjuk az $f$ hozzárendelést, azaz az összetett függvény helyettesítési értéke valamilyen $x$ argumentum mellett $f(g(x))$-szel egyezik. Ez magyarázatot ad az elnevezésekre is, miszerint az első hozzárendelést *belső függvénynek* nevezzük, a másodikat pedig *külső függvénynek*.

Ezekután a két összetett függvény hozzárendelési utasítása a következő.

$f \circ g$ előállításakor $f$-ben helyettesítünk $x$ helyére $g(x)$-et, míg a $g \circ f$ esetén pedig $g$-ben helyettesítünk $x$ helyére $f(x)$-et. Az eredmények a következők:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{(1-\sqrt{x})-1}{(1-\sqrt{x})} = \frac{-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Ha bővítünk $-1$-gyel, akkor ez a következő módon is írható:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$$

A másik esetben:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

Ezt is írhatjuk más formában, ha a gyökjel alatt a törtet két részre bontjuk. Így a következő alakot kapjuk:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

2-18 **Megoldás:**

Az $f$ függvény kölcsönösen egyértelmű, mert $f(a) = f(b)$ csak akkor teljesül, ha $a = b$, tehát létezik inverze. Az inverz függvény tulajdonképpen az eredeti hozzárendelés megfordítottját jelenti. Ha az eredeti függvényben az argumentumot $x$-szel, az értéket $y$-nal jelöljük, akkor az inverz függvényt az $y = (4x + 1)^3$ egyenlettel adhatjuk meg, ahol azonban most $y$ jelöli az inverz függvény argumentumát, $x$ pedig az itt felvett értékét.

Ez azonban így nem egy explicit alakban adott függvény: ha lehetséges, akkor célszerűbb inkább explicit alakban megadni a függvényeket, mert úgy sokkal egyszerűbben kezelhetők. Próbáljuk meg tehát $x$-re rendezni az egyenletet.

Első lépésként vonjunk mindkét oldalból köbgyököt.

$\sqrt[3]{y} = 4x + 1$

Ezután vonjunk ki mindkét oldalból 1-et, majd osszunk 4-gyel.

$\dfrac{\sqrt[3]{y} - 1}{4} = x$

Ezzel meg is kaptuk explicit alakban az inverz hozzárendelési utasítását:

$$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{4}$$

Vagy, ha ragaszkodunk ahhoz, hogy az inverz függvény argumentumát szintén $x$-szel jelöljük (de ez nem kötelező, sőt, sokszor határozottan felesleges!), akkor:

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{4}$$

Megjegyzés: Az $f^{-1}$ jelölésben nem hatványozásról van szó. Ezzel nem az $f$ függvény $(-1)$-edik hatványát jelöljük, hanem az *inverzét*. A jelölés általában nem okoz félreértést, mert a $(-1)$-edik hatványt szívesebben jelöljük $\frac{1}{f}$-fel.

# 4. lecke

# Komplex számok és a komplex számsík

# 3. Komplex számok

## 3.1. A komplex számok bevezetése

Történetileg a számfogalom bővítését az egyenletek megoldhatóságának problematikája szülte.

Legyenek $a,b \in \mathbf{N}$ adottak, akkor az

$$x + a = b$$

egyenlet $\mathbf{N}$-ben nem mindig oldható meg (csak akkor, ha $a < b$). Ha azonban $\mathbf{N}$-et kibővítjük $\mathbf{Z}$-vé, az összeadást pedig alkalmasan kiterjesztjük a bővebb $\mathbf{Z}$ halmazra, akkor a fenti egyenlet már mindig megoldható $\mathbf{Z}$-ben, akkor is, ha $a,b \in \mathbf{Z}$ (nemcsak akkor, ha $a,b \in \mathbf{N}$).

Legyenek most $a,b \in \mathbf{Z}$ adottak, $a \neq 0$, akkor az

$$ax = b$$

egyenlet $\mathbf{Z}$-ben nem mindig oldható meg (csak akkor, ha $a$ osztója $b$-nek). Ha azonban bevezetjük a $\mathbf{Z}$-nél bővebb $\mathbf{Q}$ számhalmazt, és arra a szorzást alkalmasan kiterjesztjük, akkor a fenti egyenlet már mindig megoldható $\mathbf{Q}$-ban, akkor is, ha $a,b \in \mathbf{Q}$ (nemcsak akkor, ha $a,b \in \mathbf{Z}$ ).

A valós számok bevezetése nem illik szorosan ebbe a sémába. Bizonyos algebrai (akár magasabb fokú), racionális együtthatós egyenletek megoldásaként ui. nem állítható elő az összes valós szám. Így csak az ún. *algebrai számok* állíthatók elő, melyek számossága egyébként csak megszámlálható (így tehát a „legtöbb" valós szám nem állítható elő racionális együtthatós egyenlet megoldásaként. Megemlítjük, hogy a $\pi$ is ilyen nem-algebrai, ún. *transzcendens* szám). Másrészt pedig, ismeretes, hogy vannak olyan algebrai egyenletek, melyek nem oldhatók meg $\mathbf{R}$-ben. Így pl. már az egyszerű

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenletnek sincs $\mathbf{R}$-beli megoldása. Mindazonáltal, éppen ezek a problémák indították el a próbálkozásokat a valós számok további bővítése irányába, melynek eredménye a komplex számok halmaza. Előrebocsátjuk, hogy a komplex számok körében már minden algebrai egyenlet (komplex együtthatós is!) megoldható.

A tárgyalás azonban független lesz a számfogalom-bővítés, ill. az egyenletek megoldhatóságának fentebb vázolt kérdéskörétől.

*A komplex számok bevezetése rendezett valós számpárokkal*

**3-1. Definíció:** Értelmezzünk $\mathbf{R}^2$ elemei (rendezett valós számpárok) között műveleteket a következőképp. Ha $(a,b),(c,d) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, akkor legyen:
$(a,b) + (c,d) := (a + c,b + d)$ (összeadás),
$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd,ad + bc)$ (szorzás),
$\lambda \cdot (a,b) := (\lambda a,\lambda b)$ (skalárral való szorzás).

**3-1. Állítás:** . A fenti műveletekre érvényesek az alábbi műveleti azonosságok: ha $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, akkor:

- $(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$ (az összeadás kommutatív),
- $((a,b) + (c,d)) + (e,f) = (a,b) + ((c,d) + (e,f))$ (az összeadás asszociatív),
- $(a,b) + (0,0) = (a,b)$ ((0,0) az összeadás *nulleleme*),
- minden $(a,b)$-hez van oly $(x,y)$, hogy $(a,b) + (x,y) = (0,0)$, éspedig nyilván $(x,y) = (-a, -b)$; másszóval, az összeadás megfordítható (invertálható) művelet,
- $(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$ (a szorzás kommutatív),
- $((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) = (a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f))$ (a szorzás asszociatív),
- $((a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$ ((1,0) a szorzás *egységeleme*),
- minden $(a,b) \neq (0,0)$-hoz van oly $(x,y)$, hogy $(a,b) \cdot (x,y) = (1,0)$, éspedig könnyen ellenőrizhetően $(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$; másszóval, a szorzás megfordítható (invertálható) művelet, ha $(a,b) \neq (0,0)$,
- $\lambda \cdot [(a,b) + (c,d)] = \lambda \cdot (a,b) + \lambda \cdot (c,d)$ (a skalárral való szorzás disztributív az összeadásra nézve),
- $(\lambda + \mu) \cdot (a,b) = \lambda \cdot (a,b) + \mu \cdot (a,b)$ (a skalárral való szorzás disztributív a skalár-összeadásra nézve is).

Bizonyítás:

Az állítások egy része triviális (a valós számok megfelelő műveleti azonosságaiból adódóan), a többi a definícióból több-kevesebb számolással adódik. A szorzás asszociativitását például így igazolhatjuk:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce),$$

míg ugyanakkor:

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))=(a,b)\cdot(ce-df,af+de)=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf).$$

□

3-2. Definíció: *Elnevezés*. Az $\mathbf{R}^2$ halmazt a fenti műveletekkel ellátva *komplex számsíknak* ($\mathbf{C}$), elemeit *komplex számoknak* nevezzük.

## 3.2. A komplex számok algebrai alakja

Tekintsük az $(a,0)$ alakú komplex számokat. Könnyen látható, hogy a műveletek nem vezetnek ki az ilyen alakú számok halmazából, és itt megegyeznek a valós számok közt bevezetett szokásos műveletekkel. Pontosabban, tetszőleges $a_1,a_2 \in \mathbf{R}$ esetén:

$(a_1,0) + (a_2,0) = (a_1 + a_2,0)$,

$(a_1,0) - (a_2,0) = (a_1 - a_2,0)$,

$(a_1,0) \cdot (a_2,0) = (a_1 a_2,0)$,

$\frac{(a_1,0)}{(a_2,0)} = \left(\frac{a_1}{a_2},0\right)$, ha $a_2 \neq 0$.

(Itt két komplex szám különbségét, ill. hányadosát az összeadás, ill. a szorzás inverz műveleteként értelmezzük.

*Az* $(a,0)$ *alakú számok tehát azonosíthatók a valós számokkal. A zérus szerepét a* $(0,0)$*, az* $1$ *szerepét az* $(1,0)$ *számpár játssza.*

*Jelölés*. Ha $(a,b) \in \mathbf{C}$ tetszőleges, akkor nyilván $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$. Már láttuk, hogy $(1,0)$ a szorzás egységeleme $\mathbf{C}$-ben; jelölje $i$ a $(0,1)$ komplex számot, akkor az $(a,b)$ komplex szám röviden

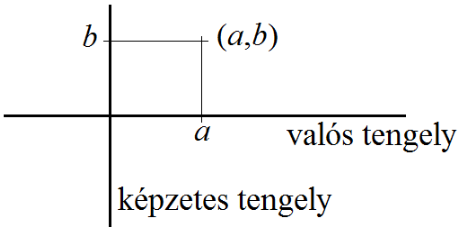
$$\boxed{a + bi}$$

alakba írható. Ez a komplex szám *algebrai alakja*.

A továbbiakban a komplex számokat sokszor egyetlen betűvel jelöljük.

*Elnevezés*. $i$-t *képzetes* (imaginárius) *egységnek*, a $bi$ alakú számokat ($b \in \mathbf{R}$) *tiszta képzetes számoknak* nevezzük.

A komplex számok az $\mathbf{R}^2$ síkon egy derékszögű koordinátarendszerben ábrázolhatók.




9. ábra. A komplex számok ábrázolása a komplex számsíkon

**3-3. Definíció:** Legyen $z := a + bi \in \mathbf{C}$ tetszőleges. Az $a \in \mathbf{R}$ számot a $z$ komplex szám *valós részének*, a $b \in \mathbf{R}$ számot pedig a $z$ komplex szám *képzetes részének* nevezzük. A valós, ill. képzetes részt Re $z$-vel, ill. Im $z$-vel jelöljük.

**Megjegyzés:** Két komplex szám nyilván pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik külön-kölön is megegyeznek. Így egy komplex $z_1 = z_2$ egyenlőség mindig *két valós* egyenlőséggel, ti. a Re $z_1 =$ Re $z_2$, Im $z_1 =$ Im $z_2$ egyenlőségekkel ekvivalens.

Használva a komplex számok algebrai alakját, és a műveletek definícióját, nyilvánvaló, hogy tetszőleges $(a + bi) \in \mathbf{C}$ és $(c + di) \in \mathbf{C}$ esetén:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad - bc)i.$$

Speciálisan, $i^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = -1 + 0i$, azaz $i^2 = -1$.

Másrészt pedig, a szorzást formálisan felírva:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + bdi^2 + bci + adi = (ad-bc) + (ad+bc)i,$$

*tehát komplex algebrai kifejezésekkel pontosan ugyanúgy számolhatunk, mint a valós esetben, az* $i^2 = -1$ *egyenlőséget figyelembe véve.*

Létezik a komplex számoknak olyan felépítése is, melynek kiindulópontja épp a fentebb levezetett $i^2 = -1$ egyenlőség. Bár ez a felépítés rövidebb, az általunk fentebb követett eljárás mégis kézenfekvőbb, mert ilyen, eddig értelmetlen egyenlőségekre mint kiindulópontra nem épít. Az említett felépítés fő gondolatmenete a következő.

Tekintsük az $a+bi$ alakú kéttagú algebrai kifejezéseket, ahol $a,b \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, $i$ pedig egy egyelőre tetszőleges szimbólum (melyet képzetes egységnek fogunk nevezni). Azonosítva az $a$ valós számot az $a+0i$ algebrai kifejezéssel, nyilván $\mathbf{R}$ egy bővítését nyertük. Most próbáljuk meg a szorzást és az összeadást kiterjeszteni a fenti alakú algebrai kifejezésekre. Avégett, hogy az összeadás és a szorzás jól ismert tulajdonságai és műveleti azonosságai (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás) érvényben maradjanak, nyilván tetszőleges $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ esetén teljesülniük kell a következő azonosságoknak:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + bdi^2 + (bc+ad)i.$$

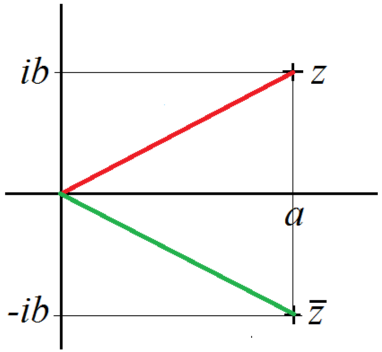
Az összeadással nincs probléma; avégett pedig, hogy a szorzás eredménye ugyancsak egy ilyen kéttagú algebrai kifejezés maradjon, már egyedül csak az $i^2$ hatványt kell alkalmas módon definiálni. Igazolható (a részletektől eltekintünk), hogy erre lényegében az egyetlen értelmes definíció az $i^2 := -1$ előírás. (Ha pl. az $i^2 := 1$ definícióval élünk, akkor szükségképp $(1+i)\cdot i = i + i^2 = i+1$, ahonnan $i = 1$ vagy $i = -1$, tehát nem nyertünk valódi számbővítést; hasonlóan, ha $i^2 := i$-t írunk elő, akkor innen $i = 1$ vagy $i = 0$, azaz így sem lehet valódi számbővítést elérni, és így tovább.)

Bevezetve tehát az $i^2 := -1$ definíciót, a fenti kéttagú algebrai kifejezésekre kiterjesztett műveletekre igazak a szokásos műveleti azonosságok. Ezekután komplex számok alatt ilyen kéttagú algebrai kifejezéseket értünk. A konstrukció egyenértékű a feljebb vázolt, számpárokat használó megközelítéssel.

3-2. Következmény: . $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$,..., $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, tehát az $i$-hatványok periodikusan váltakoznak az $1, i, -1$ és a $-i$ számok között.

3-4. Definíció: A $z = a + bi \in \mathbf{C}$ komplex szám *komplex konjugáltjának* a $\overline{z} = a - bi \in \mathbf{C}$ komplex számot nevezzük.

A konjugálás mint a komplex sík geometriai transzformációja, könnyen láthatóan nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés.




10. ábra. A komplex konjugált geometriai szemléltetése

A következő három állítás a konjugált alapvető tulajdonságait foglalja össze. Triviális számolásokkal igazolhatók, ezért a bizonyításokat elhagyjuk.

**3-3. Állítás:** . Tetszőleges $z \in \mathbf{C}$ komplex szám esetén Re $z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ és Im $z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

**3-4. Állítás:** . A $z \in \mathbf{C}$ komplex szám pontosan akkor valós, ha $z = \overline{z}$, és pontosan akkor tiszta képzetes, ha $z = -\overline{z}$.

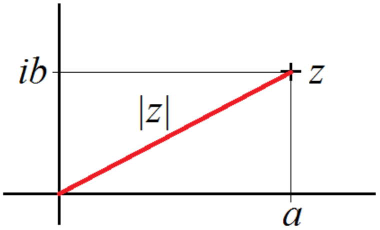
**3-5. Állítás:** . (a konjugálás műveleti azonosságai). Legyenek $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ tetszőlegesek, akkor
$(a)$ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
$(b)$ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
$(c)$ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
$(d)$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$.

**3-5. Definíció:** A $z = a+bi \in \mathbf{C}$ komplex szám *abszolút értékének* a $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ nemnegatív valós számot nevezzük.

Az abszolút érték geometriai jelentése (a Pitagorász-tétel értelmében) a $z$ komplex számot reprezentáló pont távolsága az origótól (azaz a $(0,0)$ komplex számtól). Könnyen látható, hogy ha történetesen $z$ valós, akkor $|z|$ megegyezik a közönséges (valós) abszolút értékkel. Ez indokolja az elnevezést is.

Az alábbi összefüggések könnyen igazolhatók, ill. a geometriai jelentések alapján nyilvánvalók.

**3-6. Állítás:** . Tetszőleges $z \in \mathbf{C}$ esetén:
$(a)$ $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,
$(b)$ $|\text{Re } z| \leq |z|$,
$(c)$ $|\text{Im } z| \leq |z|$,
$(d)$ $|z| \leq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|$.




11. ábra. A komplex abszolút érték geometriai szemléltetése

Bizonyítás:

Csak $(d)$-t igazoljuk, a többi könnyen látható:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 = (|a| + |b|)^2.$$

$\square$

Megjegyzés: Az állítás $(a)$ pontját felhasználva, konkrétan megadott komplex számok osztása egyszerűen elvégezhető. Ha ui. két komplex szám hányadosát kell kiszámítani, a törtet a nevező konjugáltjával bővítve, az új nevező az osztó abszolút értékének négyzete, tehát valós szám lesz.

3-1. Példa:

$$\frac{1+2i}{4-3i} = \frac{1+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{-2+11i}{16+9} = -\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i.$$

A következő egyenlőség igen nevezetes, és szintén az előző állítás $(a)$ pontjából adódik:

**3-7. Állítás:** . Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ esetén:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\ z_1\overline{z_2} + |z_2|^2.$$

**Bizonyítás:**

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$$
$$= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\ z_1\overline{z_2} + |z_2|^2. \quad \square$$

Az alábbi állítás pedig az abszolút érték leglényegesebb összefüggéseit foglalja össze:

**3-8. Állítás:** . Legyenek $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ tetszőlegesek, akkor:
$(a)$ $|z| \geq 0$ és $|z| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $z = 0$,
$(b)$ $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
$(c)$ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, és $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenségek).

**Bizonyítás:**

Csak a $(c)$-t igazoljuk, a többi könnyen adódik az eddigi eredményekből. Az előző állítást felhasználva:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\ z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \leq$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Innen a $(c)$ pont második egyenlőtlensége már adódik, ui.

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|. \quad \square$$

## 3.3. A komplex számok trigonometrikus alakja

*Polárkoordináták* $\mathbf{R}^2$*-ben*

Legyen $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ a sík egy tetszőleges pontja. E pont helyzete egyértelműen jellemezhető egyrészt az $(x,y)$ koordinátapárral is, de azzal az $(r,\phi)$ számpárral is, ahol $r$ jelenti a pont távolságát az origótól, $\phi$ pedig az origóból kiinduló, az adott ponton átmenő félegyenes irányszögét. Ezeket a számokat az $(x,y)$ pont *polárkoordinátáinak* nevezzük. Megkülönböztetésül, $x$-et és $y$-t *derékszögű koordinátáknak* nevezzük. Nyilván egyrészt

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi,$$

másrészt pedig

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \mathrm{tg}\ \phi = \frac{y}{x},$$

tehát ugyanazon pont derékszögű és polárkoordinátái kölcsönösen kifejezhetők egymással.

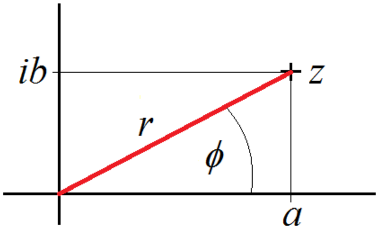
A $\phi$ irányszöget $[0,2\pi)$-beli számnak tekintjük. Az $(r,\phi)$ és az $(r,\phi+2k\pi)$ polárkoordinátákat nem tekintjük különbözőnek, ha $k \in \mathbf{N}$, azaz, ha ugyanazt a síkbeli pontot határozzák meg.

*A komplex számok trigonometrikus alakja*

Legyen $z := a + bi \in \mathbf{C}$. Tekintsük a komplex síkon a $z$ pontnak az $r$ és a $\phi$ polárkoordinátáit. Definíció szerint ekkor $r = |z|$. A $\phi$ irányszöget a $z$ komplex szám *argumentumának* nevezzük. Az $r$, $\phi$ polárkoordinátákat az $a$, $b$ derékszögű koordinátákkal kifejezve kapjuk, hogy

$$\boxed{a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi)}$$

Ezt a formát nevezzük a $z$ komplex szám *trigonometrikus alakjának*.




12. ábra. A komplex számok trigonometrikus alakjának szemléltetése

**Megjegyzés:**

- Speciálisan legyen $a > 0$ pozitív valós szám. Ennek trigonometrikus alakja:

$$a = a(\cos 0 + i \sin 0).$$

- A $-a$ negatív valós szám trigonometrikus alakja:

$$-a = a\left(\cos \pi + i \sin \pi\right).$$

- Az $ia$ tiszta képzetes szám trigonometrikus alakja:

$$ia = a\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

- Az $-ia$ tiszta képzetes szám trigonometrikus alakja:

$$-ia = a\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

A következő állítás azt mutatja, hogy a trigonometrikus alakban a szorzás viszonylag bonyolult definíciója lényegesen egyszerűbb alakot eredményez:

**3-9. Tétel:** (Moivre). Ha $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ tetszőleges komplex számok, akkor szorzatuk:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

**Bizonyítás:**

Elemi trigonometrikus addíciós tételek alkalmazásával kapjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i\sin\phi_1\cos\phi_2 + i\cos\phi_2\sin\phi_1 =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

□

*Speciális eset*. Miután könnyen láthatóan $i$ argumentuma épp $\pi/2$, abszolút értéke pedig 1, az $i$-vel való szorzás a komplex síkon egy origó középpontú, $\pi/2$ szögű, pozitív irányú elforgatásnak felel meg. Hasonlóan, a $(-1)$-gyel való szorzás egy origó középpontú, $\pi$ szögű elforgatást jelent, ami ekvivalens az origóra való tükrözéssel.

**3-10. Következmény:** . Ha $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ tetszőleges komplex számok ($z_2 \neq 0$), akkor kettőjük hányadosa:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)).$$

Speciálisan, ha $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$ tetszőleges, akkor

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\phi - i\sin\phi).$$

**Megjegyzés:** Ez utóbbi egyenlőség onnan is következik, hogy:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{r}{r^2}(\cos\phi - i\sin\phi).$$

# 5. lecke

# Hatványozás, gyökvonás, algebrai egyenletek

## 3.4. Hatványozás és gyökvonás

A Moivre-tétel ismételt alkalmazásával azonnal adódik a következő eredmény:

**3-11. Következmény:** (komplex számok hatványozása). Ha

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

és $n \in \mathbf{N}$ tetszőleges, akkor

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

**3-2. Példa:** Számítsuk ki a $z := \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ komplex szám $n$-edik hatványát!

*Megoldás*. Először $z$-t átírjuk trigonometrikus alakra: $z = \frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, ezután pedig a Moivre-tételt alkalmazhatjuk: $z = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}$.

Az előző Következményből trigonometrikus azonosságok sora vezethető le azáltal, hogy az $n$-edik hatvány még a binomiális tétel alapján is kiszámítható. Pl. legyen a $z$ komplex szám $z = \cos\phi + i\sin\phi$ alakú (ekkor abszolút értéke 1!), akkor egyrészt a binomiális tételből:

$$z^3 = \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi,$$

másrészt az előző Következményből:

$$z^3 = \cos 3\phi + i\sin 3\phi,$$

ahonnan a valós és képzetes részek összehasonlításával az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$\cos 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi, \qquad \sin 3\phi = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi.$$

*Gyökvonás komplex számokból*

*Probléma*. Adott $n \in \mathbf{N}$ egészhez és $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbf{C}$ nemzérus komplex számhoz keressünk olyan $w = R(\cos t + i\sin t)$ komplex számo(ka)t, mely(ek)re $w^n = z$.

Ha ilyen komplex szám egyáltalán van, akkor szükségképp $w^n = R^n(\cos nt + i\sin nt) = z$, azaz pl. $R^n = r$, $nt = \phi$. Ez a választás valóban meg is felel, de nem ez az egyetlen lehetőség: az $nt = \phi + 2k\pi$ egyenlőséget kielégítő argumentumok mind megfelelnek, ha $k \in \mathbf{Z}$ (a sin és cos függvények $2\pi$-periodicitása miatt). Ezek összesen $n$ db lényegesen különböző argumentumot adnak, azaz azt kaptuk, hogy:

3-12. Állítás: . A $w^n = R^n(\cos nt + i\sin nt) = z$ egyenlőséget $n$ db különböző $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ komplex szám elégíti ki, éspedig ezek trigonometrikus alakja:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0,1,\dots,n-1).$$

A fenti $w_k$ számokat a $z$ komplex szám *n-edik gyökeinek* nevezzük. Ezek elhelyezkedése a komplex számsíkon szemléletes: egy origó közepű, $\sqrt[n]{r}$ sugarú, szabályos $n$-szög csúcsaira illeszkednek.

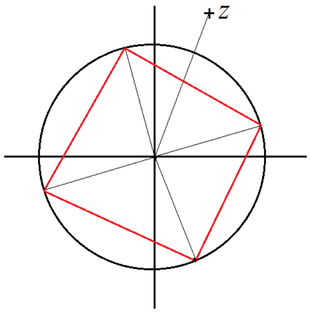
3-3. Példa: Számítsuk ki a $(-i)$ szám komplex negyedik gyökeit!

*Megoldás*. $(-i)$ trigonometrikus alakja: $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, innen $(-i)$ komplex 4-ik gyökeinek alakja:

$$\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{4}$$

$(k = 0,1,2,3)$, azaz:

$$\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}, \quad \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}, \quad \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}, \quad \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}.$$




13. ábra. A komplex gyökök elhelyezkedése a komplex síkon

Megjegyzés: A zérus számnak nyilvánvalóan bármelyik pozitív kitevőjű gyöke csak a zérus lehet.

*Speciális eset*. Az 1 szám komplex $n$-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük. A fentiek alapján ezek trigonometrikus alakja:

$$\varepsilon_k^n = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,1,\dots,n-1)$$

Ezen $n$ db pont a komplex síkon egy origó középpontú, egységsugarú körvonalra illeszkedik, és egy szabályos $n$-szöget alkot.

## 3.5. Algebrai egyenletek

Az $n$-edfokú ($n \in \mathbf{N}$) algebrai egyenletek általános alakja:

$$\boxed{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n = 0}$$

ahol $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adott komplex számok, és $a_n \neq 0$.

Ismeretes, hogy ha az egyenlet együtthatói speciálisan *valós* számok, akkor már másodfokú egyenletek esetében is előfordul, hogy az egyenletnek nincs *valós* megoldása. Ha viszont van, akkor az zárt formulával kifejezhető (megoldóképlet). Látni fogjuk, hogy a bővebb $\mathbf{C}$ halmazon viszont mindig van megoldás, akkor is, ha az egyenlet együtthatói maguk is komplex számok. Harmad- és negyedfokú egyenletek esetében megoldóképlet még mindig létezik (bár a másodfokúénál lényegesen bonyolultabb). Kiderült azonban, hogy általános ötöd- és ennél magasabb fokú egyenletekre már megoldóképlet sem létezik, azaz a megoldások általában nem állíthatók elő az együtthatókból az alapműveletek (gyökvonást is beleértve) véges sokszori alkalmazásával.

*Valós együtthatós* egyenletek gyökeinek elhelyezkedését egyszerűen jellemezhetjük:

**3-13. Állítás:** . Ha a $z \in \mathbf{C}$ szám megoldása a valós együtthatós

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n = 0$$

egyenletnek, akkor egyúttal $\overline{z}$ is megoldás. Következésképp valós együtthatós egyenletek megoldásai vagy maguk is valósak, vagy pedig komplex konjugált gyökpárokat alkotnak.

**Bizonyítás:**

Legyen $z \in \mathbf{C}$ megoldás, azaz tegyük fel, hogy $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$. Véve mindkét oldal konjugáltját: $a_0 + a_1 \overline{z} + \ldots + a_n \overline{z}^n = 0$, azaz $\overline{z}$ is megoldás. $\square$

Felvetődik a kérdés, hogy egy $n$-efokú egyenletnek egyáltalán *létezik-e* megoldása. A következő híres tétel pozitívan válaszol erre:

3-14. Tétel: (az algebra alaptétele). Minden komplex együtthatós $n$-edfokú algebrai egyenletnek van $\mathbf{C}$-ben gyöke, éspedig éppen $n$ darab (ezek nem feltétlen különbözők). Jelölje $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a gyököket, ekkor minden $z \in \mathbf{C}$ komplex szám mellett teljesül az

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n \equiv a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

azonosság.

Megjegyzés: A tétel érdekessége még, hogy bár állítása tisztán algebrai jellegű, a tétel bizonyításához mégis analitikai, éspedig komplex függvénytani eszközök szükségesek.

A továbbiakban csak másodfokú és arra visszavezethető egyenletekkel foglalkozunk. Legyenek $a, b, c \in \mathbf{C}$ tetszőleges (komplex!) számok, és tekintsük az

$$az^2 + bz + c = 0$$

egyenletet. A valós együtthatós esetből már ismert teljes négyzetté való kiegészítés most is alkalmazható:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

ahonnan kapjuk, hogy $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, azaz

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Formálisan tehát visszakaptuk az ismert megoldóképletet, azonban itt a gyökjel *komplex* négyzetgyökvonást jelent, mely két, általában különböző komplex számot ad. Speciálisan, ha a $D := b^2 - 4ac$ diszkrimináns valós és pozitív, akkor a $D$-ből vont komplex négyzetgyök két értéke megegyezik a valós négyzetgyökkel és annak ellentettjével, így tehát ekkor a jól ismert közönséges megoldóképlethez jutunk vissza.

**3-4. Példa:** Oldjuk meg $\mathbf{C}$-ben az alábbi egyenletet: $z^2 - 2z + 10 = 0$.

*Megoldás.* $z = \frac{2+\sqrt{4-4\cdot 10}}{2}$. A $(-36)$ szám komplex négyzetgyökei: $6i$ és $(-6i)$, így a két megoldás: $z_1 = 1 + 3i$, és $z_2 = 1 - 3i$.

**3-5. Példa:** Oldjuk meg $\mathbf{C}$-ben az alábbi egyenletet: $z^2 + iz - 1 = 0$.

*Megoldás.* $z = \frac{-i+\sqrt{-1+4}}{2} = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$. A 3 szám komplex négyzetgyökei: $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$, így a két megoldás: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, és $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

*Másodfokúra visszavezethető egyenletek*

Ezek általános alakja:

$$az^{2n} + bz^n + c = 0$$

ahol $n \in \mathbf{N}$ tetszőleges.

Az egyenlet $z^n$-re nézve másodfokú, ezért $z^n = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, innen pedig

$$z = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy mindkét gyökvonás komplex értelemben értendő. A „belső” négyzetgyök 2, a „külső” $n$-edik gyök $n$ db különböző értéket eredményez. Így az egyenletnek $2n$ db megoldása van (melyek között lehetnek egyenlők is).

**3-6. Példa:** Oldjuk meg **C**-ben az alábbi egyenletet: $z^3 + \frac{1}{z^3} = -2$.

*Megoldás*. Szorozva $z^3$-nal, kapjuk, hogy $z^6 + 2z^3 + 1 = 0$. Ez $z^3$-ra nézve másodfokú egyenlet, melynek egyetlen megoldása $z^3 = -1$. Innen $z$ értékeit komplex köbgyökvonással kapjuk. Áttérve trigonometrikus alakra: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, innen 3 különböző megoldást kapunk:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

# 6. lecke

## Ellenőrző kérdések és feladatok

## 3.6. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** A $(\cos 3\pi + i\ \sin 3\pi)$ szám

- [ ] valós
- [ ] tiszta képzetes
- [ ] zérus
- [ ] abszolút értéke $3$

**2.** A $(-i)$ 2003-ik hatványa

- [ ] $1$
- [ ] $i$
- [ ] $-i$
- [ ] $-1$

**3.** Az $i^{2n} + i^n$ komplex szám zérus, ha $n$ értéke

- [ ] $2001$
- [ ] $2002$
- [ ] $2003$
- [ ] $2004$

**4.** A $z := \cos \frac{3\pi}{2} + i\ \sin \frac{3\pi}{2}$ komplex szám valós és képzetes részeire teljesül, hogy:

- [ ] $\mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z > 0$
- [ ] $\mathrm{Re}\, z < 0$, $\mathrm{Im}\, z > 0$
- [ ] $\mathrm{Re}\, z < 0$, $\mathrm{Im}\, z < 0$
- [ ] $\mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z < 0$

**5.** Az $(1+i)^4$ hatvány értéke

- [ ] $1 + 4i$
- [ ] $-4$
- [ ] $-4i$
- [ ] $4$

**6.** Az $\dfrac{1-i}{1+i}$ komplex tört értéke

- [ ] $1$
- [ ] $-1$
- [ ] $-i$
- [ ] $i$

**7.** Ha egy $z$ komplex számra $z = -\bar{z}$ teljesül, akkor szükségképp

- [ ] valós
- [ ] tiszta képzetes
- [ ] $|z| = 1$
- [ ] $\mathrm{Im}\, z = 0$

**8.** Az $\left|\dfrac{1+2i}{1-2i}\right|$ szám értéke

- ☐ $1$
- ☐ $i$
- ☐ $2i$
- ☐ $-1$

**9.** A $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2000}$ hatvány értéke

- ☐ $i$
- ☐ $1$
- ☐ $-i$
- ☐ $-1$

**10.** A $2 \cdot (\cos 2007\pi + i\ \sin 2007\pi)$ komplex szám értéke

- ☐ $2007$
- ☐ $-2007i$
- ☐ $-2$
- ☐ $2i$

End Quiz

Score:

## 3.7. Feladatok

**3-1. Feladat:** Számítsuk ki az

$$\frac{1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2006}}{1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{2006}}$$

kifejezés értékét.

Megoldás: itt

---

**3-2. Feladat:** Végezzük el az alábbi osztásokat: $(a)$ $\frac{2+5i}{1-4i}$, $(b)$ $\frac{5+4i}{2+6i}$.

Megoldás: itt

---

**3-3. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:
$(a)$ $1+i\sqrt{3}$, $(b)$ $\sqrt{3}-i$, $(c)$ $-2+2i$.

Megoldás: itt

---

**3-4. Feladat:** „A Moivre-tétel szerint

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

Kiszámítva azonban a bal oldalt:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+i)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+2i+i^2)=i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

adódik. A jobb oldal ugyanakkor $i$.” Hol a hiba a gondolatmenetben?

Megoldás: itt

---

**3-5. Feladat:** Legyen $z:=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Számítsuk ki az $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2$ összeget.

Megoldás: itt

---

**3-6. Feladat:** Számítsuk ki az $(a)$ $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}\right)^{18}$ és a $(b)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{6}$ hatványok értékét.

Megoldás: itt

---

**3-7. Feladat:** Jelölje $z_0,z_1,z_2,z_3$ az $(1-i)$ szám komplex 4-ik gyökeit. Számítsuk ki a $z_0+z_1+z_2+z_3$ összeget.

Megoldás: itt

**3-8. Feladat:** Mi lehet egy olyan komplex szám 5-ik hatványa, melynek 3-ik hatványa épp $i$?

Megoldás: itt

**3-9. Feladat:** Tekintsük az $1999z^2 - 19z + 199 = 0$ egyenletet, jelölje $z_1$,$z_2$ a két (komplex!) gyököt. Mennyivel egyenlő $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^{1999}$?

Megoldás: itt

**3-10. Feladat:** Határozzuk meg mindazon $z$ komplex számokat, melyekre $z^3 = -\frac{i}{z^3}$.

Megoldás: itt

**3-11. Feladat:** Keressük meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását: $z^3 - 1 = \frac{6}{z^3}$.

Megoldás: itt

**3-12. Feladat:** Keressük meg az $\frac{1}{z^2} + 2z^2 = 2$ egyenlet összes komplex megoldását.

Megoldás: itt

**3-13. Feladat:** Legyenek $0 < x < \pi$ és $n \in \mathbf{N}$ tetszőlegesek. Hozzuk zárt alakra az alábbi összeget: $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$.

Megoldás: itt

---

**3-14. Feladat:** Ha tudjuk, hogy $(x+y) + (x-y)i = (1+i)^2 + \dfrac{1}{i}$, mivel egyenlő az $x$ és $y$ valós szám?

Megoldás: itt

---

**3-15. Feladat:** Oldjuk meg a $z^2 - 2\overline{z} = 0$ egyenletet.

Megoldás: itt

---

**3-16. Feladat:** Vonjunk négyzetgyököt a $z = -5 + 12i$ komplex számból.

Megoldás: itt

---

**3-17. Feladat:** Határozzuk meg $(1+i)^7$ trigonometrikus alakját.

Megoldás: itt

---

**3-18. Feladat:** Tekintsük a következő komplex számokat:
$z_1 = 4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), \quad z_2 = 4(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ), \quad z_3 = 2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$
Határozzuk meg $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3}$ trigonometrikus alakját.

Megoldás: itt

---

**3-19. Feladat:** Oldjuk meg a $z^6 + z^3 - 20 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

Megoldás: itt

---

**3-20. Feladat:** Oldjuk meg a $z^4 + iz^2 + 12 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

Megoldás: itt

---

**3-1 Megoldás:**

Figyelembe véve az $i$-hatványokra vonatkozó összefüggéseket:

$$1+i+i^2+i^3=i^4+i^5+i^6+i^7=\ldots=0$$

és

$$1-i+i^2-i^3=i^4-i^5+i^6-i^7=\ldots=0.$$

A számláló és a nevező tagjait tehát négyesével csoportosíthatjuk. Egy-egy négyes csoport összege 0, innen

$$\frac{1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2006}}{1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{2006}}=\frac{i^{2004}+i^{2005}+i^{2006}}{i^{2004}-i^{2005}+i^{2004}}=\frac{1+i-1}{1-i-1}=-1.$$

**3-2 Megoldás:**

$(a)$

$$\frac{2+5i}{1-4i} = \frac{2+5i}{1-4i} \cdot \frac{1+4i}{1+4i} = \frac{-18+13i}{1+16} = -\frac{18}{17} + i\frac{13}{17}.$$

$(b)$

$$\frac{5+4i}{2+6i} = \frac{5+4i}{2+6i} \cdot \frac{2-6i}{2-6i} = \frac{34-22i}{4+36} = \frac{17}{20} - i\frac{11}{20}.$$

3-3 **Megoldás:**

$(a)$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$(b)$

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

$(c)$

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

3-4 **Megoldás:**

A két oldal kiszámítása hibátlan, de a Moivre-tétel nem alkalmazható, mert a bal oldalon nem trigonometrikus alakú komplex számok állnak. Így a két oldal valóban nem egyenlő.

**3-5 Megoldás:**

Vegyük észre, hogy ($|z| = 1$ miatt)

$$\frac{1}{z} = \overline{z},$$

és

$$\frac{1}{z^2} = \overline{z^2} = \overline{z}^2.$$

Innen

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = 1 + 2\mathrm{Re}\, z + 2\mathrm{Re}\, z^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

mert

$$z^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

**3-6 Megoldás:**

$(a)$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}=\frac{2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

Innen

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}\right)^{18}=\cos\frac{18\cdot 5\pi}{3}+i\sin\frac{18\cdot 5\pi}{3}=1.$$

$(b)$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6},$$

innen

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{6}=\cos 11\pi+i\sin 11\pi=-1.$$

**3-7 Megoldás:**

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

innen

$$z_0 = \sqrt[8]{2} \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16} \right),$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2} \cdot \left( \cos \left( \frac{7\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = i z_0,$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2} \cdot \left( \cos \left( \frac{7\pi}{16} + \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{16} + \frac{2\pi}{2} \right) \right) = -z_0,$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2} \cdot \left( \cos \left( \frac{7\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) \right) = -i z_0.$$

Következésképp $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Megjegyezzük, hogy ehhez a gyökök konkrét kiszámítása nem kellett, csak a $z_1 = iz_0$, $z_2 = -z_0$, $z_3 = -iz_0$ összefüggések felismerése!

**3-8 Megoldás:**

Azon komplex számok, melyek 3-ik hatványa $i$, az $i$ szám komplex köbgyökei, azaz a

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},\qquad \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6},\qquad \cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}$$

számok. Ezek 5-ik hatványai:

$$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6},$$

$$\cos\frac{25\pi}{6}+i\sin\frac{25\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},$$

és

$$\cos\frac{45\pi}{6}+i\sin\frac{45\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}.$$

3-9 **Megoldás:**

Az egyenlet megoldása nélkül: mivel az egyenlet *valós* együtthatós, a diszkriminánsnegatív, a két komplex gyök egymás konjugáltja, így abszolút értékük megegyezik. Ezért

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^{1999} = 1.$$

**3-10 Megoldás:**

Az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$z^6 = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Innen

$$z = \cos\frac{3\pi + 4k\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{12} \qquad (k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5)$$

**3-11 Megoldás:**

Az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$z^6 - z^3 - 6 = 0.$$

Innen

$$z^3 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 = 3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \\ -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) \end{cases}$$

ezért

$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3},$$

$$z_4 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_5 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -\sqrt[3]{2},$$

$$z_6 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

**3-12 Megoldás:**

Az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$2z^4 - 2z^2 + 1 = 0.$$

Innen

$$z^2 = \frac{2 + \sqrt{4-8}}{4} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

ezért

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right),$$

$$z_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

3-13 **Megoldás:**

A feladat azt példázza, hogy bár most tiszta valós (trigonometrikus) kifejezések szerepelnek, komplex algebrai eszközökkel mégis célt érhetünk, sőt, jóval egyszerűbben, mint anélkül.

Vezessük be a $z := \cos x + i \sin x$ jelölést, akkor Re $z = \cos x$, és

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \text{Re}\left(1 + z + z^2 + \ldots + z^n\right)$$

A jobb oldalon egy véges mértani sor áll, melynek zárt alakban fel tudjuk írni az összegét:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}\left(z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}\right)}{z^{1/2}\left(z^{1/2} - z^{-1/2}\right)}$$

Ámde tetszőleges valós (nem feltétlen egész) kitevőre $z^k = \cos kx + i \sin kx$, és ezért $z^{-k} = \cos(-kx) + i\sin(-kx) = \cos kx - i \sin kx$, ahonnan: $z^k - z^{-k} = 2i \sin kx$. Ezt felhasználva:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = z^{n/2} \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$$

A jobb oldali tört értéke már *valós*, és Re $z^{n/2} = \cos \frac{n}{2}x$. Innen végül azt kapjuk, hogy

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \text{Re}\left(1 + z + z^2 + \ldots + z^n\right) = \frac{\cos \frac{n}{2}x \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Megjegyezzük még, hogy a formula az $0 < x < \pi$ feltétel miatt mindig értelmes, hiszen a nevező ekkor nem lehet zérus. Megjegyezzük azt is, hogy a levezetésben 3-11 következményt *nem egész* kitevők mellett használtuk, melyet nem bizonyítottunk ugyan, de a Moivre-formulához hasonló módon igazolható: a részletektől eltekintünk.

3-14 **Megoldás:**

Az egyenlet jobb oldalán végezzük el a műveleteket, és írjuk fel az ott álló komplex számot algebrai alakban. Számoljunk részletekben.

$(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i}{0^2+1^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

(Az osztás elvégzésekor a nevező konjugáltával bővítettük a törtet. A nevezőben $i = 0 + i$ állt, s ennek konjugáltával $0 - i = -i$-vel bővítettünk.)

Helyettesítsük be a részeredményeket az egyenletbe.

$(x+y) + (x-y)i = 2i - i = i$

Mivel $x$ és $y$ valós számok, ezért $x+y$ és $x-y$ is valós szám. Az egyenlet bal oldalán tehát olyan komplex szám áll, melynek valós része $x+y$, s képzetes része $x-y$. Két komplex szám akkor és csakis akkor egyenlő, ha külön a valós, és a képzetes részeik is egyenlők. A jobb oldal valós része $0$, képzetes része pedig $1$, hiszen $i = 0 + 1\cdot i$. A(z egyetlen) komplex egyenletből így két egyenletből álló valós egyenletrendszert kapunk, amit egyszerű megoldani:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Összeadva a két egyenletet: $2x = 1$, azaz $x = \dfrac{1}{2}$.

Kivonva a két egyenletet: $2y = -1$, azaz $y = -\dfrac{1}{2}$.

A feladat megoldása tehát: $x = \dfrac{1}{2}$ és $y = -\dfrac{1}{2}$.

3-15 **Megoldás:**

Olyan egyenletet kell megoldanunk, amiben egy komplex ismeretlen, és annak konjugáltja is szerepel. Célszerű felírni általánosan az megoldás algebrai alakját, mert ebből felírható a konjugált is. Keressük tehát a megoldást $z = a + bi$ alakban, ahol $a,b \in \mathbf{R}$ egyelőre ismeretlenek. Akkor $\overline{z} = a - bi$. Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$(a + bi)^2 - 2(a - bi) = 0$

Elvégezve a négyzetre emelést:

$$a^2 + 2abi + b^2 i^2 - 2a + 2bi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 + 2abi - b^2 - 2a + 2bi = 0$$

Csoportosítva a valós és tiszta képzetes számokat a bal oldalon:

$(a^2 - b^2 - 2a) + (2ab + 2b)i = 0$

Két komplex szám csak úgy lehet egyenlő, ha külön a valós részeik is, és külön a képzetes részeik is megegyeznek. A jobb oldalon 0 áll: ennek valós és képzetes része is $0$. Így a(z egyetlen) komplex egyenletből egy kétismeretlenes valós egyenletrendszert kapunk:

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad 2ab + 2b = 0$$

A második egyenlettel célszerű foglalkozni előbb, mert annak bal oldalán kiemelhető egy $2b$ tényező:

$2b(a + 1) = 0$

Egy szorzat csak úgy lehet $0$, ha valamelyik tényezője $0$. Így két eset fordulhat elő. Az első esetben $b = 0$, a másodikban pedig $a = -1$. Innentől tehát két ágon folytatódik a megoldás.

1. eset: $b = 0$.

Ezt helyettesítsük be a valós részek egyenlőségét leíró egyenletbe.

$a^2 - 0^2 - 2a = 0$, azaz $a^2 - 2a = 0$.

Az egyenlet bal oldalán $a$ kiemelhető:.

$a(a-2)=0$

Ennek két megoldása van: $a=0$, és $a=2$.

Ezután már felírhatjuk az egyenlet két megoldását. A megoldásokat célszerű indexeléssel megkülönböztetni.

Az $a=0$ és $b=0$ számpárból kapjuk a $z_1=0+0i=0$ megoldást.

Az $a=2$ és $b=0$ számpárból pedig a $z_2=2+0i=2$ megoldást kapjuk.

2. eset: $a=-1$.

Ezt behelyettesítjük a valós részek egyenlőségét leíró egyenletbe.

$(-1)^2-b^2-2(-1)=0$, azaz $3-b^2=0$.

Ennek az egyenletnek két megoldása van: $b=\sqrt{3}$ és $b=-\sqrt{3}$.

Ebben az esetben is két $(a{,}b)$ számpárt kaptunk, amelyekből az egyenletnek további két megoldása írható fel.

Az $a=-1$ és $b=\sqrt{3}$ számpárból kapjuk a $z_3=-1+\sqrt{3}i$ megoldást.

Az $a=-1$ és $b=-\sqrt{3}$ számpárból pedig a $z_4=-1-\sqrt{3}i$ megoldást kapjuk.

Végül tekintsük át az egyenlet összes megoldását. Négy darab megoldást kaptunk, melyek a következők:

$$z_1=0,\quad z_2=2,\quad z_3=-1+\sqrt{3}i,\quad z_4=-1-\sqrt{3}i$$

**3-16 Megoldás:**

Olyan $u$ komplex számo(ka)t kell keresnünk, amely(ek) négyzete $z$-vel egyenlő: $u^2 = -5+12i$. Célszerű az általános algebrai alakból elindulni. $u$-t keressük $u = a+bi$, alakban, ahol $a,b \in \mathbf{R}$ egyelőre ismeretlenek. Helyettesítsük ezt be az egyenletbe:

$(a+bi)^2 = -5+12i$

Elvégezve a négyzetreemelést:

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -5+12i \qquad \Rightarrow \qquad a^2 + 2abi - b^2 = -5+12i$$

Csoportosítsunk ezután a bal oldalon, külön a valós tagokat, s kölün a képzetes tagokat:

$(a^2 - b^2) + 2abi = -5+12i$

A két oldalon álló két komplex szám akkor és csakis akkor egyenlő, ha a valós és képzetes részeik külön-külön is megegyeznek:

$$a^2 - b^2 = -5, \qquad 2ab = 12$$

A második egyenletből fejezzük ki $b$-t: $b = \dfrac{6}{a}$, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$a^2 - \left(\dfrac{6}{a}\right)^2 = -5$

Elvégezve a négyzetre emelést, és rendezve az egyenletet:

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5 \qquad \Rightarrow \qquad a^4 - 36 = -5a^2 \qquad \Rightarrow \qquad a^4 + 5a^2 - 36 = 0$$

Vezessük be a $t = a^2$ új változót, akkor $t$-re nézve másodfokú egyenletet nyerünk: $t^2 + 5t - 36 = 0$.

Írjuk fel a megoldóképletet. (Mivel $t$ valós, ezért szükség van $\pm$-ra.)

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-5+13}{2} = 4 \\ \dfrac{-5-13}{2} = -9 \end{cases}$$

Mivel az $a$ valós számot jelöl, így négyzete nem lehet negatív. Ebből következik, hogy a második megoldás, a $-9$ hamis gyök, csak a $t = 4$ megoldással kell foglalkoznunk. $t = a^2$ miatt innen $a$-ra két megoldást kapunk: $a_1 = 2$ és $a_2 = -2$. Ezeket visszahelyettesítve a $b$-re nyert korábbi $b = \dfrac{6}{a}$ egyenletbe, $b$-re is két értéket kapunk:

$$b_1 = \frac{6}{a_1} = \frac{6}{2} = 3, \qquad b_2 = \frac{6}{a_2} = \frac{6}{-2} = -3$$

Ezután felírhatjuk a megoldásokat. Két $(a,b)$ számpárt kaptunk, így $u$ két lehetséges értéke:

$$u_1 = 2 + 3i \text{ (az } a = 2 \text{ és } b = 3 \text{ számpárból), és}$$

$$u_2 = -2 - 3i \text{ (az } a = -2 \text{ és } b = -3 \text{ számpárból).}$$

Röviden tehát: $\sqrt{z} = \pm(2 + 3i)$.

**Megjegyzés:** Látható tehát, a négyzetgyökvonást algebrai alakban is el lehet végezni a komplex számok körében. Általában azonban nem ez a legcélszerűbb eljárás. Sokkal célszerűbb a trigonometrikus alak használata, és így nem csak négyzetgyököt, hanem bármilyen kitevőjű gyököt lehet vonni a komplex számokból.

**3-17 Megoldás:**

Egy komplex számot kell hatványoznunk elég nagy kitevőre. Ha ezt algebrai alakban szeretnénk elvégezni, akkor nagyon sok szorzást kellene végrehajtani. Sokkal célszerűbb a komplex számot átírni trigonometrikus alakra, és ott elvégezni a hatványozást. Így ráadásul rögtön trigonometrikus alakban fogjuk megkapni az eredményt.

Írjuk tehát át $(1+i)$-t trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\phi = \dfrac{|b|}{|a|} = \dfrac{1}{1} = 1$

ahonnan: $\phi = 45°$, mivel $(1+i)$ nyilván az első síknegyedben helyezkedik el. Azaz:

$1+i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$.

A hatványozásnál használhatjuk a Moivre-formula 3-11 következményét, ahonnan:

$$(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos(7\cdot 45°) + i\sin(7\cdot 45°)) = 8\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°).$$

3-18 **Megoldás:**

A meghatározandó tört számlálójában két komplex szám összege áll. Ezek a számok trigonometrikus alakban vannak megadva, azonban az összeadást csak algebrai alakban tudjuk elvégezni. Ezért először meg kell határoznunk $z_1$ és $z_2$ algebrai alakját.

$$z_1 = 4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$z_2 = 4(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

Ezután már elvégezhető az összeadás.

$$z_1 + z_2 = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) + (-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) = 4\sqrt{2}i$$

Hátra van még egy osztás. A számláló algebrai alakban van, a nevező pedig trigonometrikus alakban. Közös alakra kell őket hozni. Mivel az eredményt trigonometrikus alakban kell megadni, ezért célszerű a számlálót átírni trigonometrikus alakra. A számláló tiszta képzetes szám, így trigonometrikus alakjában argumentuma $\phi = 90^\circ$, abszolút értéke pedig nyilván $r = 4\sqrt{2}$. A számláló trigonometrikus alakja tehát:

$$z_1 + z_2 = 4\sqrt{2}(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ).$$

Most végezzük el az osztást:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{4\sqrt{2}(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)}{2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)} = \frac{4\sqrt{2}}{2}(\cos(90^\circ - 110^\circ) + i \sin(90^\circ - 110^\circ)) = 2\sqrt{2}(\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ))$$

Mivel negatív szöget kaptunk, azért az argumentumhoz adjunk hozzá $360^\circ$-ot: ezzel a komplex szám értéke nem változik, de az argumentum 0 és $360^\circ$ közé kerül. Kaptuk tehát, hogy:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = 2\sqrt{2}(\cos 340^\circ + i \sin 340^\circ)$$

**3-19 Megoldás:**

Bevezetve az $u := z^3$ új ismeretlent, az eredetileg hatodfokú egyenlet másodfokúra egyszerűsödik:

$u^2 + u - 20 = 0$. A megoldóképletet alkalmazva: $u_{1,2} = \dfrac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-20)}}{2} = \dfrac{-1 + \sqrt{81}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+9}{2} = 4 \\ \dfrac{-1-9}{2} = -5 \end{cases}$

Ahhoz, hogy az eredeti ismeretlent kapjuk meg, ezen $u$ értékekből még komplex köbgyököt kell vonnunk. Ehhez viszont a másodfokú egyenlet gyökeit trigonometrikus alakra kell hozni. Az argumentum nyilván $0°$ (a pozitív gyök esetén), ill. $180°$ (a negatív gyök esetén):

$u_1 = 4 = 4(\cos 0° + i \sin 0°)$., és

$u_2 = -5$ esetén $r = 5$ és $\varphi = 180°$, így trigonometrikus alakja

$u_2 = -5 = 5(\cos 180° + i \sin 180°)$.

A gyökvonások végrehajtása után 6 megoldást fogunk kapni.

Egyrészt

$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{4}\left(\cos \dfrac{0° + k \cdot 360°}{3} + i \sin \dfrac{0° + k \cdot 360°}{3}\right)$, ahol $k = 0,1,2$ értékeket veheti fel.

Másrészt

$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{u_2} = \sqrt[3]{5}\left(\cos \dfrac{180° + k \cdot 360°}{3} + i \sin \dfrac{180° + k \cdot 360°}{3}\right)$, ahol $k = 0,1,2$ értékeket veheti fel.

Felírhatjuk külön-külön is a gyököket.

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos 0° + i \sin 0°\right), \quad z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos 120° + i \sin 120°\right), \quad z_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos 240° + i \sin 240°\right),$$

$$z_4 = \sqrt[3]{5}\left(\cos 60° + i \sin 60°\right), \quad z_5 = \sqrt[3]{5}\left(\cos 180° + i \sin 180°\right), \quad z_6 = \sqrt[3]{5}\left(\cos 300° + i \sin 300°\right).$$

**3-20 Megoldás:**

Vezessük be az $t := z^2$ új ismeretlent, ezzel a negyedfokú egyenletet visszavezethetjük másodfokú egyenletre: $t^2 + it + 12 = 0$. A megoldóképletet alkalmazva:

$$t_{1,2} = \frac{-i + \sqrt{i^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-i + \sqrt{(-49)}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-i + 7i}{2} = 3i \\ \dfrac{-i - 7i}{2} = -4i \end{cases}$$

Az eredeti ismeretlen meghatározásához ezen $t$ értékekből még komplex négyzetgyököt kell vonnunk.

A gyökvonást trigonometrikus alakban tudjuk végrehajtani, ezért a másodfokú egyenlet gyökeit írjuk át trigonometrikus alakra. Mindkét gyök tiszta képzetes, így argumentumuk $\phi = 90°$, ha a képzetes rész pozitív, ill. $\phi = 270°$, ha a képzetes rész negatív. Ezért:

$t_1 = 3i = 3(\cos 90° + i \sin 90°)$, és: $t_2 = -4i = 4(\cos 270° + i \sin 270°)$.

A gyökvonások végrehajtása után 4 megoldást fogunk kapni.

Egyrészt

$z_{1,2} = \sqrt{t_1} = \sqrt{3}\left(\cos \dfrac{90° + k \cdot 360°}{2} + i \sin \dfrac{90° + k \cdot 360°}{2}\right)$, ahol $k = 0{,}1$ értékeket veheti fel.

Másrészt

$z_{3,4} = \sqrt{t_2} = \sqrt{4}\left(\cos \dfrac{270° + k \cdot 360°}{2} + i \sin \dfrac{270° + k \cdot 360°}{2}\right)$, ahol $k = 0{,}1$ értékeket veheti fel.

Írjuk fel külön-külön is gyököket.

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos 45° + i \sin 45°\right), \quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos 225° + i \sin 225°\right),$$

$$z_3 = 2\left(\cos 135° + i \sin 135°\right), \quad z_4 = 2\left(\cos 315° + i \sin 315°\right).$$

# 7. lecke

# Sorozatok és konvergencia

# 4. Valós számsorozatok

Legyen $X$ egyelőre tetszőleges halmaz.

**4-1. Definíció:** Egy $f : \mathbf{N} \to X$ függvényt, melyre $\mathcal{D}_f = \mathbf{N}$, $X$-beli *sorozatnak* nevezünk.

Speciálisan, ha $X = \mathbf{R}$ (vagy $X = \mathbf{C}$), akkor valós (ill. komplex) *számsorozatról* beszélünk.

A kialakult szokás szerint az $f(1), f(2), f(3), \ldots$ függvényértékekre inkább az $f_1, f_2, f_3, \ldots$ jelölésekkel hivatkozunk, és a függvény argumentumát (az 1,2,3 stb. számokat) a sorozat *indexének* nevezzük. Az, hogy $f$ egy $X$-beli sorozat, szokás (kissé következetlenül) az $(f_n) \subset X$ szimbólummal jelölni. Magát az $f$ sorozatot (ami tehát egy függvény) pedig szokás szerint az $(f_n)$ szimbólummal jelöljük, ahol $f_n$ a sorozat $n$-edik tagja.

**4-2. Definíció:** Ha $(f_n) \subset X$ egy $X$-beli sorozat, $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ pedig természetes számokból álló szigorúan növekvő sorozat, akkor az $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \ldots$ (röviden: az $(f_{n_k}) \subset X$) sorozatot az eredeti $(f_n) \subset X$ sorozat egy *részsorozatának* nevezzük.

Nyilván minden sorozat részsorozata önmagának.

A fejezet további részében *valós számsorozatokról* lesz szó. Már itt megjegyezzük, hogy a legtöbb fogalom és tétel nehézség nélkül általánosítható *komplex* számsorozatok esetére is.

Sorozatokat legtöbbször explicit formulával adunk meg, pl. $x_n := \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\ldots)$. Szokásos még az ún. *rekurzív megadás* is, amikor a sorozat egy tagját nem az indexével, hanem a megelőző indexű tagok segítségével definiáljuk, pl.

$$x_1 := A, \qquad x_{n+1} := (1+p)x_n \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

ahol $p$ adott valós szám. (Ez a példa egy $A$ nagyságú tőke évi $p$ kamatláb melletti évenkénti növekedését írja le.) A rekurzív módon megadott sorozat sok esetben átírható explicit sorozattá. Az előző példában:

$$x_n = A \cdot (1+p)^{n-1} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

## 4.1. Sorozatok konvergenciája, alapvető tételek

Most bevezetjük a valós analízis egyik legfontosabb fogalmát:

**4-3. Definíció:** Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ számsorozat *konvergens, éspedig az $x \in \mathbf{R}$ számhoz tart*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ ún. *küszöbindex*, hogy minden $n \geq N$ indexre $|x_n - x| < \varepsilon$ teljesül. Ezt a tényt így jelöljük: $x_n \to x$ vagy $\lim x_n = x$ . Az $x$ számot a sorozat *határértékének*, vagy *limeszének* nevezzük. A nem konvergens sorozatokat *divergensnek* is nevezzük.

Ha $(x_n)$-et egy bonyolultabb kifejezés definiálja, és nem nyilvánvaló, hogy mi a sorozat indexe, akkor szokás még az $x_n \to x \quad (n \to +\infty)$ vagy a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ jelölések használata.

Szemléletesen: a sorozat "nagy indexű" tagjai „tetszőleges pontossággal” megközelítik az $x$ számot.

A definícióból nyilvánvaló, hogy sem a konvergencia ténye, sem a határérték nem változik, ha a sorozat *véges sok* tagját megváltoztatjuk.

**Megjegyzés:** A későbbiekben, a kialakult gyakorlat szerint az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat jelölésére mindig az $(x_n)$ szimbólumot használjuk, és nem $x$-et (egyéb függvények jelölésétől eltérően). Nem fog tehát félreértést okozni, ha az $(x_n)$ sorozat határértékét esetenként $x$-szel jelöljük.

**Megjegyzés:** Nem hivatalos használatra bevezetjük a következő elnevezést ill. szóhasználatot. Azt mondjuk, hogy valamely tulajdonság egy sorozat *majdnem minden* tagjára teljesül, ha az illető tulajdonság csak véges sok indexre nem teljesül, azaz, ha valamely indextől kezdve az összes további indexre teljesül. Ezzel a szóhasználattal: egy $(x_n) \subset \mathbf{R}$ számsorozat konvergens, és $x_n \to x$, ha bármely (bármilyen kicsi) $\varepsilon > 0$ szám esetén a sorozat majdnem minden tagja $\varepsilon$-nál közelebb esik $x$-hez.

Nyilvánvaló, hogy konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és az eredeti sorozat határértékéhez tart.

Megjegyzés: A definíció nem tartalmazza a határérték egyértelműségét, azonban látni fogjuk, hogy (a szemlélettel összhangban) konvergens sorozatoknak csak egy határértékük van.

A zérushoz tartó sorozatokat röviden *zérussorozatoknak* nevezzük.

A gyakorlatban határértékekek számításakor jól felhasználható a konvergencia definíciójának alábbi átfogalmazása (a bizonyítást az Olvasóra hagyjuk).

4-1. Állítás: Tetszőleges $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozatra $x_n \to x$ pontosan akkor, ha $|x_n - x| \to 0$.

Most egy, a konvergenciánál jóval egyszerűbb, de fontos és könnyebben ellenőrizhető fogalmat vezetünk be:

4-4. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *korlátos*, ha az abszolút értékekből képezett $\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}$ számhalmaz felülről korlátos $\mathbf{R}$-ben, azaz, ha van oly $C \geq 0$ szám, hogy $|x_n| \leq C$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ indexre. Az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *felülről* (*alulról*) *korlátos*, ha a sorozat tagjaiból képezett $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ számhalmaz felülről (alulról) korlátos $\mathbf{R}$-ben.

A korlátosság a konvergenciánál gyengébb fogalom, amint azt a következő állítás is mutatja.

4-2. Állítás: Minden $(x_n) \subset \mathbf{R}$ konvergens sorozat korlátos is.

Bizonyítás:

Legyen $x_n \to x$. Akkor speciálisan az $\varepsilon := 1$ számhoz is van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $|x_n - x| < 1$, azaz véges sok kivétellel a sorozat tagjai 1-nél közelebb vannak $x$-hez, tehát lefedhetők az

$(x-1,x+1)$ véges hosszúságú intervallummal. A kivételes tagok szintén lefedhetők egy alkalmas véges hosszúságú intervallummal, ezért ez a sorozat összes tagjára is igaz, azaz a sorozat korlátos. □

Az állítás megfordítása nem igaz, a korlátosságból a konvergencia nem következik!

*Példák*

**4-1. Példa:** Az $x_n := a \quad (n = 1,2,\ldots)$ *stacionárius sorozat* (melynek minden tagja $a$-val egyenlő) korlátos, konvergens és $a$-hoz tart tetszőleges $a$ valós azám esetén.

**4-2. Példa:** Az $x_n := \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\ldots)$ sorozat korlátos, konvergens és 0-hoz tart.

**Bizonyítás:**

Valóban, $|x_n| \leq 1$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$-re; továbbá tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett minden olyan $N \in \mathbf{N}$ szám jó küszöbindexnek, melyre $N > \frac{1}{\varepsilon}$. □

**4-3. Példa:** Az $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n = 1,2,\ldots)$ sorozat korlátos, konvergens és 0-hoz tart.

**Bizonyítás:**

Valóban, $|x_n| \leq 1$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$-re; továbbá tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett minden olyan $N \in \mathbf{N}$ szám jó küszöbindexnek, melyre $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$. □

**4-4. Példa:** Legyen $c \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $|c| < 1$. Akkor az $x_n := c^n \quad (n = 1,2,\ldots)$ sorozat korlátos, konvergens és 0-hoz tart.

Bizonyítás:

Valóban, $|x_n| \leq 1$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$-re; továbbá tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett minden olyan $N \in \mathbf{N}$ szám jó küszöbindexnek, melyre $N > \frac{\log \varepsilon}{\log |c|}$. □

**4-5. Példa:** Az $x_n := n \quad (n = 1,2,...)$ sorozat nem korlátos, ezért divergens.

**4-6. Példa:** Az $x_n := (-1)^n \quad (n = 1,2,...)$ sorozat korlátos és divergens. Ennek egy részsorozata a $(-1, -1, -1,...)$ stacionárius sorozat (ami konvergens).

Az alábbi egyszerű állításokban összefoglaljuk a konvergencia legfontosabb tulajdonságait. Figyeljük meg a bizonyítások jellegzetes technikáit!

**4-3. Állítás:** Minden konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

Bizonyítás:

Indirekt tegyük fel, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat olyan, hogy $x_n \to x$ és $x_n \to y$, ahol $x \neq y$. Jelölje $\varepsilon := \frac{|x-y|}{2}$. Akkor léteznek $N_1 \in \mathbf{N}$ és $N_2 \in \mathbf{N}$ küszöbindexek úgy, hogy $|x_n - x| < \varepsilon$ minden $n \geq N_1$-re és $|x_n - y| < \varepsilon$ minden $n \geq N_2$-re. Jelölje $N$ a két küszöbindex közül a nagyobbikat, akkor minden $n \geq N$-re $|x_n - x| < \varepsilon$ és $|x_n - y| < \varepsilon$, innen:

$$2\varepsilon = |x - y| = |x - x_n - y + x_n| \leq |x - x_n| + |y - x_n| < 2\varepsilon,$$

ami nem lehetséges. □

**4-4. Állítás:** Ha $(x_n)$,$(y_n) \subset \mathbf{R}$ olyan konvergens sorozatok, hogy minden $n$ indexre $x_n \leq y_n$, akkor $\lim x_n \leq \lim y_n$.

**Bizonyítás:**

Tegyük fel indirekt, hogy $x := \lim x_n > y := \lim y_n$. Jelölje $\varepsilon := \frac{x-y}{2}$, akkor léteznek $N_1 \in \mathbf{N}$ és $N_2 \in \mathbf{N}$ küszöbindexek úgy, hogy $|x_n - x| < \varepsilon$ minden $n \geq N_1$-re és $|x_n - y| < \varepsilon$ minden $n \geq N_2$-re. Jelölje $N$ a két küszöbindex közül a nagyobbikat, akkor minden $n \geq N$-re $x - x_n < \varepsilon$, azaz $x_n > x - \varepsilon$, ugyanakkor $y_n - y < \varepsilon$, azaz $y_n < y + \varepsilon$. Innen:

$$y_n < y + \varepsilon = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} = x - \frac{x-y}{2} = x - \varepsilon < x_n,$$

ami ellentmond az $x_n \leq y_n$ $(n \in \mathbf{N})$ feltevésnek. $\square$

**4-5. Következmény:** . Nemnegatív tagú konvergens sorozatok határértéke is nemnegatív.

**Bizonyítás:**

Az állítás az előző állítás speciális esete, azt az $x_n :\equiv 0$ stacionárius sorozatra alkalmazva. $\square$

**4-6. Állítás:** („rendőr elv”). Ha $(x_n)$,$(y_n)$,$(z_n) \subset \mathbf{R}$ olyan sorozatok, hogy minden $n$ indexre $x_n \leq y_n \leq z_n$ , továbbá $(x_n)$-nek és $(z_n)$-nek közös határértéke van: $\lim x_n = \lim z_n = x$, akkor az $(y_n)$ sorozat szükségképp konvergens és határértéke ugyanez a közös érték: $\lim y_n = x$.

Bizonyítás:

A feltétel miatt $x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x$. Ha most $y_n - x \geq 0$ teljesül, akkor $|y_n - x| \leq |z_n - x|$ ; ha pedig $y_n - x < 0$, akkor $|y_n - x| \leq |x_n - x|$. Mindenképp igaz tehát, hogy: $|y_n - x| \leq |x_n - x| + |z_n - x|$. Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor léteznek $N_1 \in \mathbf{N}$ és $N_2 \in \mathbf{N}$ küszöbindexek úgy, hogy $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ minden $n \geq N_1$-re, és $|x_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ minden $n \geq N_2$-re. Jelölje $N$ a két küszöbindex közül a nagyobbikat, akkor minden $n \geq N$-re $x_n - x < \frac{\varepsilon}{2}$ és $x_n - z < \frac{\varepsilon}{2}$, innen $|y_n - x| \leq |x_n - x| + |z_n - x| < \varepsilon$, azaz $y_n \to x$. $\square$

**4-7. Következmény:** . Ha $(x_n)$,$(y_n) \subset \mathbf{R}$ olyan sorozatok, hogy minden $n$ indexre $|x_n| \leq y_n$ és $y_n \to 0$, akkor az $(x_n)$ sorozat is szükségképp konvergens és szintén 0-hoz tart.

Bizonyítás:

Mivel $-y_n \leq x_n \leq y_n$ $(n \in \mathbf{N})$, és $-y_n \to 0$, ezért az előző állítás alapján $x_n \to 0$. $\square$

Sorozatok határértékének kiszámítását nagyon megkönnyíti, hogy a határérték a szokásos műveletekkel felcserélhető:

**4-8. Állítás:** Tegyük fel, hogy $(x_n)$,$(y_n) \subset \mathbf{R}$ konvergens sorozatok, $x_n \to x$, $y_n \to y$, és legyen $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. Akkor:
$(a)$ $(x_n + y_n)$ is konvergens és $x_n + y_n \to x + y$,
$(b)$ $(x_n - y_n)$ is konvergens és $x_n - y_n \to x - y$,
$(c)$ $(c \cdot x_n)$ is konvergens és $c \cdot x_n \to cx$,
$(d)$ $(x_n y_n)$ is konvergens és $x_n y_n \to xy$,
$(e)$ $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ is konvergens és $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ (feltéve, hogy $y \neq 0$).

Bizonyítás:

Példaképpen $(d)$-t igazoljuk, a többit az Olvasóra bízzuk.

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x|.$$

Ámde $(x_n)$ konvergens lévén, korlátos is, így alkalmas $C \geq 0$ konstans mellett $|x_n y_n - xy| \leq C \cdot (|y_n - y| + |x_n - x|)$ . Következésképp a jobb oldal zérushoz tart, innen pedig $x_n y_n \to xy$. $\square$

**4-7. Példa:** Számítsuk ki az alábbi sorozat határértékét (ha az létezik):

$$x_n := \frac{3 + n - 5n^2}{2 - 10n + 2n^2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

*Megoldás*: Osszuk el a számlálót és a nevezőt is $n^2$-tel, és alkalmazzuk az előző állítást:

$$x_n = \frac{\frac{3}{n^2} + \frac{1}{n} - 5}{\frac{2}{n^2} - \frac{10}{n} + 2} \to -\frac{5}{2},$$

mert $\frac{1}{n} \to 0$ és $\frac{1}{n^2} \to 0$. $\square$

**4-8. Példa:** Számítsuk ki az alábbi sorozat határértékét (ha az létezik):

$$x_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

*Megoldás*: Szorozzunk és osszunk is $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})$-nel:

$$x_n = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

Innen

$$|x_n| = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

ahonnan $x_n \to 0$ következik. □

**4-9. Példa:** Számítsuk ki az alábbi rekurzív módon megadott sorozat határértékét (ha az létezik):

$$x_1 := 0 \quad \text{és} \quad x_{n+1} := \frac{3}{5}x_n - 4 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

*Megoldás*: A feladat most két, jól elkülöníthető részre bomlik:

$(a)$ Kiszámítjuk, hogy *ha* a sorozat konvergens, akkor mi lehet a határérték. *Tegyük fel* tehát, hogy valamely $x$ számra $x_n \to x$. Akkor a rekurzív definíció baloldala nyilván szintén $x$-hez tart, a jobboldal pedig $\left(\frac{3}{5}x-4\right)$-hez. A kettő szükségképp egyenlő, azaz $x = \frac{3}{5}x - 4$, ahonnan $x = -10$. Tehát: *ha* létezik a határérték, akkor az csakis $(-10)$ lehet.

$(b)$ Igazoljuk, hogy a sorozat valóban konvergens. A rekurzív definíció mindkét oldalából kivonva az előbb kiszámított lehetséges határértéket: $x_{n+1}+10 := \frac{3}{5}x_n + 6 = \frac{3}{5}(x_n+10)$. Ugyanezt az egyenlőséget alkalmazva az egyre kisebb indexekre:

$$x_{n+1}+10 = \frac{3}{5}(x_n+10) = \left(\frac{3}{5}\right)^2(x_{n-1}+10) = \left(\frac{3}{5}\right)^3(x_{n-2}+10) =$$

$$= \ldots = \left(\frac{3}{5}\right)^n (x_1 + 10) = 11 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0,$$

amivel igazoltuk, hogy a sorozat valóban konvergens, és újra megkaptuk, hogy a határérték $(-10)$-zel egyenlő. $\square$

## 4.2. Korlátos sorozatok, monoton sorozatok

Már láttuk, hogy a konvergens sorozatok szükségképp korlátosak is. Az állítás megfordítása nem igaz (egy korlátos sorozat nem feltétlen konvergens), de mindenesetre van konvergens részsorozata:

4-9. Tétel: (Bolzano–Weierstrass). Ha $(x_n) \subset \mathbf{R}$ korlátos sorozat, akkor kiválasztható belőle konvergens részsorozat.

Bizonyítás:

Legyen $(x_n) \subset \mathbf{R}$ korlátos sorozat, akkor van oly $I_0$ véges hosszúságú zárt intervallum, hogy $(x_n) \subset I_0$. Felezzük meg $I_0$-t, és jelölje $I_1$ azt a felét, amelyik a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza (ha mindkét fél ilyen, válasszuk tetszőlegesen az egyiket). Most felezzük meg $I_1$-et, és jelölje $I_2$ azt a felét $I_1$-nek, amelyik a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza, és így tovább. Így kapunk egy $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ egymásba ágyazott zárt intervallum-sorozatot. A Cantor-axióma miatt ezeknek van közös pontja, jelöljön $x$ egy ilyet. Mindegyik $I_k$ intervallumban a sorozatnak végtelen sok tagja van: legyenek $x_{n_k} \in I_k$ tetszőleges (különböző) tagok ($k \in \mathbf{N}$). Akkor $(x_{n_k})$ részsorozata $(x_n)$-nek, és $(x_{n_k}) \to x$ , mert a felezéses konstrukció miatt

$$|x_{n_k} - x| \leq |I_k| = \frac{1}{2^k} \cdot |I_0| \to 0,$$

ahol $|I_k|$ jelöli az $I_k$ intervallum hosszát. □

Megjegyzés: A tétel a konvergens részsorozatok számáról és azok határértékéről semmit sem állít. Lehet, hogy több, különböző határértékű részsorozat is kiválasztható.

Most egy fontos, speciális sorozattípust vezetünk be:

**4-5. Definíció:** Az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *monoton növő*, ha $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$, ill. *monoton fogyó*, ha $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$. A monoton növő és fogyó sorozatokat röviden *monoton* sorozatoknak is nevezzük.

Ha a korlátosság mellett a monotonitást is feltesszük, akkor ez már elegendő a konvergenciához. Pontosabban:

**4-10. Tétel:** (a monoton sorozatok tétele). Minden monoton növő és felülről korlátos sorozat konvergens is. Hasonlóan, minden monoton fogyó és alulról korlátos sorozat konvergens is.

**Bizonyítás:**

Legyen az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat monoton növő (a másik eset hasonló módon kezelhető). Jelölje $x := \sup\{x_1, x_2, \ldots\}$. Megmutatjuk, hogy $x_n \to x$. Egyrészt nyilván $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x$, (mert $x$ felső korlát), másrészt tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz van oly $N$ index, hogy $x_N > x - \varepsilon$ (mert $x$ a *legkisebb* felső korlát, így $x - \epsilon$ már nem felső korlátja a sorozatnak). Kihasználva a monotonitást, minden $n \geq N$ index mellett $x_n > x - \varepsilon$ is igaz. Ez az egyenlőtlenség az előző $x_n \leq \epsilon$ egyenlőtlenséggel együtt azt jelenti, hogy $|x_n - x| < \epsilon$ teljesül minden $n \geq N$-re. Tehát valóban, $x_n \to x$. $\square$

**Megjegyzés:** A tétel csak a konvergencia tényét mondja ki. Az, hogy a határértéket hogyan lehet *kiszámítani*, egészen más (és rendszerint sokkal nehezebb) probléma.

**4-10. Példa:** Tekintsük az

$$x_1 := 0, \quad x_{n+1} := \sqrt{2+x_n} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

rekurzív sorozatot. Ennek tagjai: $0$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,..., ahonnan világos, hogy a sorozat monoton növő. Kiszámítva az első néhány tagot, sejthető, hogy $x_n \leq 2$ teljesül minden $n$-re. Ez valóban így is van, ezt teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ indexre igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re: $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$, tehát állítás $(n+1)$-re is igaz, ennélfogva valamennyi $n$ indexre igaz. A sorozat tehát monoton növő és felülről korlátos, így konvergens is. A rekurzív sorozat határértékét ezek után könnyen kiszámíthatjuk: jelölje $x := \lim x_n$, akkor a rekurzív definícióból $x_{n+1}^2 := 2 + x_n$ adódik. A baloldal $x^2$-hez, a jobboldal $(2 + x)$-hez tart, így az $x$ határérték megoldása az $x^2 = 2 + x$ másodfokú egyenletnek, azaz $x = 2$ (az egyenlet másik gyöke negatív, ami nem jöhet számításba, lévén a sorozat tagjai pozitívak).

A gyakorlatban sokszor előfordul a divergens sorozatok egy speciális osztálya, melyre ezért külön elnevezést vezetünk be:

**4-6. Definíció:** Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat a $(+\infty)$-hez tart (ill. a $(-\infty)$-hez tart), ha minden $C > 0$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ index esetén $x_n > C$ (ill. $x_n < -C$). Ezt a tényt így jelöljük: $x_n \to +\infty$, vagy $\lim x_n = +\infty$ (ill. $x_n \to -\infty$, vagy $\lim x_n = -\infty$).

Szemléletesen: egy sorozat a $(+\infty)$-hez tart, ha bármely (nagy) $C > 0$ korlát esetén a sorozat majdnem minden tagja meghaladja ezt a korlátot.

Nyilvánvaló, hogy egy $(+\infty)$-hez tartó sorozat minden részsorozata is $(+\infty)$-hez tart. Az is könnyen látható, hogy ha egy monoton növő sorozatnak van $(+\infty)$-hez tartó részsorozata, akkor maga a sorozat is $(+\infty)$-hez tart. Végül, a definíció azonnali következménye, hogy ha $x_n \to +\infty$ és $(y_n) \subset \mathbf{R}$ olyan sorozat, hogy $x_n \leq y_n$ teljesül minden $n$ indexre, akkor a „nagyobb" sorozat szintén $(+\infty)$-hez tart: $y_n \to +\infty$.

Hangsúlyozzuk, hogy a hasonló jelölés ellenére a $(+\infty)$-hez ill. $(-\infty)$-hez tartó sorozatok *nem konvergensek*!

**4-11. Példa:** Az $x_n := n$ $(n = 1,2,\ldots)$ sorozat $(+\infty)$-hez tart. (Ez nyilvánvaló.)

**4-12. Példa:** Az $x_n := 2^n$ $(n = 1,2,\ldots)$ sorozat $(+\infty)$-hez tart (mert az előző sorozat egy részsorozata).

**4-13. Példa:** Az $x_n := \sqrt{n}$ $(n = 1,2,\ldots)$ sorozat $(+\infty)$-hez tart (mert monoton nő, és van $(+\infty)$-hez tartó részsorozata: a $\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9},\ldots$, azaz az $1,2,3,\ldots$ részsorozat egy ilyen részsorozat).

A végtelenbe tartó sorozatok és a zérussorozatok szoros kapcsolatban állnak, pontosabban:

**4-11. Állítás:** Ha $x_n \to +\infty$ vagy $x_n \to -\infty$, akkor az $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ reciprok sorozat zérussorozat.

**Bizonyítás:**

Csak az $x_n \to +\infty$ esetet igazoljuk, a másik eset hasonlóan bizonyítható. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor az $1/\epsilon$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Innen minden $n \geq N$-re $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{x_n} < \varepsilon$, tehát $\frac{1}{x_n} \to 0$. $\square$

Az állítás megfordítása nem igaz: zérussorozatok reciprokai nem feltételen tartanak $(+\infty)$-hez vagy $(-\infty)$-hez. *Ellenpélda*: $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $x_n \to 0$, de $\frac{1}{x_n}$ nem tart sem $(+\infty)$-hez, sem $(-\infty)$-hez, hiszen az egymást követő tagok előjelei váltakoznak.

## 4.3. Cauchy-sorozatok

A konvergencia definíciójának gyakorlati alkalmazását sokszor nehézzé teszi, hogy a definíció tartalmazza magát a határértéket is. Ha egy sorozatról csak azt szeretnénk eldönteni, hogy konvergens-e, a definíció alkalmazásához meg kell „sejteni" a határértéket is, ami nem mindig egyszerű. A következő fogalom éppen ezt teszi lehetővé: konvergenciavizsgálatot a határérték előzetes ismerete nélkül.

4-7. Definíció: Az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n,m \geq N$ indexre $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teljesül.

Szemléletesen: egy sorozat Cauchy-sorozat, ha bármely (kicsi) $\varepsilon > 0$ szám esetén a sorozat majdnem minden tagja egymáshoz $\varepsilon$-nál közelebb van.

A Cauchy-tulajdonságból a korlátosság könnyen következik:

4-12. Állítás: Minden Cauchy-sorozat korlátos.

Bizonyítás:

Legyen $(x_n) \subset \mathbf{R}$ Cauchy-sorozat. Ekkor speciálisan az $\varepsilon := 1$ számhoz is van oly $N$ küszöbindex, hogy minden $n,m \geq N$-re $|x_n - x_m| < 1$. Az $m := N$ választással:

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + x_N \leq 1 + |x_N| = 1 + C \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $C$ jelöli az $|x_N|$ számot. Tehát a sorozat tagjainak abszolút értéke véges sok kivétellel (az első $N$ tag kivételével) egy közös szám ($C + 1$) alatt maradnak, azaz lefedhetők egy véges intervallummal. Az első $N$ tag ugyancsak lefedhető egy másik véges intervallummal, így tehát a sorozat valóban korlátos. $\square$

A konvergenciából a Cauchy-tulajdonság szintén egyszerűen adódik.

**4-13. Állítás:** Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

**Bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy $x_n \to x$, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Akkor $\varepsilon/2$-höz is van oly $N$ küszöbindex, hogy $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \geq N$. Legyenek $n, m \geq N$ tetszőlegesek. Akkor

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tehát $(x_n)$ valóban Cauchy-sorozat. $\square$

Meglepő módon az állítás megfordítható, tehát a Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával. Ez azonban már egyáltalán nem nyilvánvaló.

**4-14. Tétel:** Minden Cauchy-sorozat konvergens.

**Bizonyítás:**

Legyen $(x_n) \subset \mathbf{R}$ Cauchy-sorozat, akkor korlátos is, így (a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt) kiválasztható belőle konvergens $(x_{n_k})$ részsorozat. Jelölje $x := \lim x_{n_k}$. Megmutatjuk, hogy az eredeti $(x_n)$ sorozat is $x$-hez tart. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\epsilon/2$-höz van oly $N$ küszöbindex, hogy minden $n, m \geq N$-re $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ (mert $(x_n)$ Cauchy-sorozat), továbbá van oly $M$ küszöbindex is, hogy minden $k \geq M$-re $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$ (mert $x_{n_k} \to x$ ). Jelölje $L$ e két küszöbindex közül a nagyobbikat. Mivel nyilván $n_k \geq k$, azért

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ez teljesül minden $n \geq L$ esetén, tehát valóban, $x_n \to x$. $\square$

Megjegyzés: Bár a bizonyítás technikája az előzőkénél nem nehezebb, a tétel állítása sokkal mélyebb: a bizonyításból kiderül, hogy a tétel a Bolzano–Weierstrass-tételen múlik, az pedig, mint már láttuk, a Cantor-axiómán. Mindegyik tétel tehát a valós számokat alapvetően jellemző „hézagmentesség” folyománya. Mind a konvergencia, mind a Cauchy-tulajdonság definiálható sokkal altalánosabb struktúrákban is: kiderül, hogy egy konvergens sorozat mindig Cauchy-féle, de a Cauchy-sorozatok nem feltétlen konvergensek. Épp ezért különlegesen fontos szerepet játszanak azok a speciális struktúrák, ahol ez mégis igaz, azaz amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens. Ezek az ún. *teljes metrikus terek*. Az érdeklődők a kérdéskörnek pl. [2]-ben nézhetnek utána.

# 8. lecke

## Nevezetes határértékek, konvergenciasebesség

## 4.4. Speciális határértékek

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi határértékekre, de a példák önmagukban is érdekesek.

**4-14. Példa:** Tetszőleges $a > 0$ valós szám esetén $x_n := \sqrt[n]{a} \to 1$ $(n \to +\infty)$.

**Bizonyítás:**

Ha $a \geq 1$, a Bernoulli-egyenlőtlenséget használhatjuk:

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(1 + \sqrt[n]{a} - 1\right)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

Innen $0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \to 0$, így a „rendőr-elv” miatt $\sqrt[n]{a} - 1 \to 0$, azaz $\sqrt[n]{a} \to 1$. Ha pedig $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, így $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$, ahonnan az állítás már következik. $\square$

**4-15. Példa:** $x_n := \sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to +\infty)$.

**Bizonyítás:**

Jelölje $y_n := x_n - 1$. Elég azt igazolni, hogy $y_n \to 0$. A binomiális tétel szerint:

$$n = (1 + y_n)^n = 1 + \binom{n}{1} y_n + \binom{n}{2} y_n^2 + \binom{n}{3} y_n^3 + \ldots + y_n^n.$$

Mivel $y_n \geq 0$, azért a jobb oldal minden tagja nemnegatív, így az összeg csak csökkenhet, ha belőle tagokat hagyunk el. Elhagyva a harmadik tag kivételével az összes tagot, kapjuk, hogy:

$$n \geq \binom{n}{2} y_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} y_n^2,$$

ahonnan $y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{4}{n}} \to 0$, ezért $y_n \to 0$. $\square$

**4-16. Példa:** $x_n := \sqrt[n]{n!} \to +\infty \ (n \to +\infty)$.

**Bizonyítás:**

A sorozat monoton növő, mert

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n!)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} = \left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)^{1/n} =$$

$$\left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right)^{1/n} \geq 1,$$

ezért $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, azaz $x_{n+1} \geq x_n$ is igaz. Tekintsük a sorozat $2n$-edik tagját, és csökkentsük a kifejezés értékét azáltal, hogy az $1,2,\ldots,n$ számok helyébe 1-et, az $(n+1),(n+2),\ldots,2n$ számok helyébe pedig $n$-et írunk:

$$x_{2n} = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot 2n)^{1/2n} \geq (1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot n \cdot \ldots \cdot n)^{1/2n} =$$

$$= (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

Az $(x_n)$ sorozat tehát monoton növő, és van a $(+\infty)$-hez tartó részsorozata, így maga is a $(+\infty)$-hez tart. $\square$

**4-17. Példa:** Az $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ (n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens.

Bizonyítás:

A sorozat *monoton növő*, mert a számtani-mértani közép egyenlőtlenség miatt:

$$x_n = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\ldots+(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

A sorozat ugyanakkor *felülről korlátos is*, mert ugyancsak a számtani-mértani közép egyenlőtlenség alapján:

$$x_n = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\ldots+(1+\frac{1}{n})}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1+n+1}{n+2}\right)^{n+1} = 4.$$

Következésképp a sorozat konvergens is. □

*Jelölés*: A fenti sorozat határértéke az analízisben igen fontos, ezért külön jelölést vezetünk be rá, és a továbbiakban $e$-vel jelöljük.

Megjegyzés: Az $e$ szám irracionális, egy közelítő értéke $e \approx 2.71$.

A fenti sorozattal kapcsolatos a következő paradoxon. Mivel $(x_n)$ csupa $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tényezők szorzata, azt gondolhatnánk, hogy $x_n \to 1$, hiszen mindegyik tényező nyilvánvalóan 1-hez tart. A hiba a gondolatmenetben ott van, hogy rosszul alkalmaztuk a határértékekre vonatkozó alapösszefüggéseket. Ezekből ui. csak az következik, hogy tetszőleges, de *rögzített számú* sorozat szorzatának határértéke megegyezik a határértékek szorzatával. Jelen esetben pedig a tényezők száma is $n$ függvénye.

**4-18. Példa:** Az $x_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens.

**Bizonyítás:**

Tekintsük a reciprok sorozatot:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

innen $x_n \to \frac{1}{e}$ már következik. $\square$

## 4.5. Konvergenciasebességek összehasonlítása

Az alábbi fogalom nagyon szemléletes, és sokat segíthet konkrét sorozatok határértékeinek kiszámításában.

*Elnevezés*: Azt mondjuk, hogy az $(a_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *gyorsabban tart a* $(+\infty)$*-hez*, mint a $(b_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat, ha mindketten a $(+\infty)$-hez tartanak, de $\frac{b_n}{a_n} \to 0$.

Az első két példa nyilvánvaló, ezért ezeket nem bizonyítjuk.

**4-19. Példa:** Ha $a > b > 1$, akkor $a^n$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint $b^n$.

**4-20. Példa:** Ha $\alpha > \beta > 0$, akkor $n^\alpha$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint $n^\beta$.

**4-15. Állítás:** Minden $a > 1$, $\alpha > 0$ esetén $a^n$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint $n^\alpha$.

**Bizonyítás:**

Legyen $k$ tetszőleges egész, melyre $k \geq \alpha$. Akkor

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \leq \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{b^n}\right)^{2k} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(1+(b-1))^n}\right)^{2k},$$

ahol $b := a^{1/2k} < 1$. A tört nevezőjét a Bernoulli-egyenlőtlenséggel csökkethhetjük, innen:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{1+n(b-1)}\right)^{2k} = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}+(b-1)}\right)^{2k} \to 0.$$

$\square$

**4-16. Állítás:** Minden $a > 1$ esetén $n!$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint $a^n$.

**Bizonyítás:**

Jelölje $x_n := \frac{a^n}{n!}$. Igazolni kell, hogy $x_n \to 0$. Nyilván

$$x_n^{1/n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

(mert $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$). Legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Mivel az $(x_n^{1/n})$ sorozat konvergens, ehhez van oly $N$ küszöbindex, hogy az ezt meghaladó $n$ indexekre:

$$0 < x_n^{1/n} < \frac{1}{2},$$

innen pedig $0 < x_n < \frac{1}{2^n} \to 0$, azaz valóban, $x_n \to 0$. $\square$

# 9. lecke

# Ellenőrző kérdések és feladatok

## 4.6. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** Ha egy $(a_n) \subset \mathbf{R}$ sorozatnak létezik határértéke, akkor szükségképp

☐ monoton és korlátos ☐ Cauchy-sorozat ☐ monoton fogyó ☐ divergens

**2.** Ha az $(a_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat a $+\infty$ -be tart, akkor az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ reciprok sorozat szükségképp

☐ $+\infty$-be tart
☐ divergens
☐ zérussorozat
☐ konvergens, és $\lim a_n > 0$

**3.** Az $(a_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat biztosan konvergens, ha

☐ alulról korlátos és monoton nő
☐ felülről korlátos és monoton nő
☐ alulról nem korlátos és monoton fogy
☐ felülről korlátos és monoton fogy

**4.** Legyen $(a_n) \subset \mathbf{R}$ egy számsorozat. Melyik következtetés helyes?

☐ Ha $(a_n)$ nem korlátos, akkor nem is konvergens
☐ Ha $(a_n)$ nem konvergens, akkor nem is korlátos
☐ Ha $(a_n)$ nem monoton, akkor nem is konvergens
☐ Ha $(a_n)$ korlátos, akkor konvergens is

**5.** Ha az $(a_n),(b_n) \subset \mathbf{R}$ sorozatok mindketten $+\infty$-be tartanak, akkor szükségképp

- ☐ $a_n - b_n \to 0$
- ☐ $\frac{a_n}{b_n} \to 1$
- ☐ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ korlátos
- ☐ $\frac{1}{a_n+b_n} \to 0$

**6.** Ha $a_n \to -\infty$, akkor az $(a_n)$ sorozat szükségképp

- ☐ konvergens
- ☐ monoton fogy és korlátos
- ☐ $(a_n)$-nek nincs konvergens részsorozata
- ☐ nem korlátos

**7.** Ha egy $(a_n) \subset \mathbf{R}$, sorozat konvergens, akkor szükségképp

- ☐ Cauchy-sorozat
- ☐ monoton
- ☐ monoton és korlátos
- ☐ nincs konvergens részsorozata

**8.** Ha az $(a_n)$,$(b_n) \subset \mathbf{R}$ sorozatok mindketten $0$-ba tartanak, akkor szükségképp

☐ $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ ☐ $\frac{b_n}{a_n} \to 0$ ☐ $e^{a_n} + e^{b_n} \to 1$ ☐ $\sqrt{|a_n^2 + b_n^2|} \to 0$

**9.** Ha $(a_n) \subset \mathbf{R}$ monoton nő, és nem korlátos, akkor szükségképp

- ☐ Cauchy-sorozat
- ☐ kiválasztható belőle konvergens részsorozat
- ☐ kiválasztható belőle korlátos részsorozat
- ☐ $+\infty$-be tart

**10.** Az $(a_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat konvergens, éspedig az $a \in \mathbf{R}$ számhoz tart, ha

- ☐ bármely $N \in \mathbf{N}$-hez van oly $\varepsilon > 0$, hogy minden $n \geq N$ esetén $|a_n - a| > \varepsilon$
- ☐ bármely $\varepsilon > 0$-hez van oly $n \in \mathbf{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$
- ☐ van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$

☐ bármely $\varepsilon > 0$ és $n \geq N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$

End Quiz

Score:

## 4.7. Feladatok

**4-1. Feladat:** Igazoljuk, hogy az $x_0 := 0$, $x_{n+1} := -x_n^2 - \frac{1}{4}$ $(n = 0,1,2,\dots)$ rekurzív módon definiált sorozat monoton fogy.

Megoldás: itt

---

**4-2. Feladat:** Mutassuk meg, hogy a következő sorozat $(+\infty)$-hez tart:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megoldás: itt

---

**4-3. Feladat:** Mutassuk meg, hogy a következő sorozat 1-hez tart:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megoldás: itt

---

**4-4. Feladat:** Konvergensek-e a következő sorozatok, és ha igen, akkor mi a határértékük?

(a)

$$a_n := \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(4n+1)(5n+1)(6n+1)} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

(b)

$$a_n := \frac{n^2+2n}{n+3} - \frac{n^3+3n^2}{n^2-2} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

(c)

$$a_n := \frac{2^{n-2}+2}{2^{n+2}-2} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

(d)

$$a_n := \frac{n^3+4^n}{n^5-4^n} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

(e)

$$a_n := \frac{(1+2n^2)^3}{(1+3n^3)^2} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

**Megoldás:** itt

---

**4-5. Feladat:** Konvergens-e az alábbi sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := -1000 + \frac{a_n}{1001} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

**Megoldás:** itt

---

**4-6. Feladat:** Igazoljuk, hogy a következő rekurzív sorozatok nem konvergensek.

$(a)$

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n - \frac{3}{x_n} \quad (n = 1{,}2{,}\ldots),$$

$(b)$

$$a_1 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1{,}2{,}\ldots).$$

Megoldás: itt

---

**4-7. Feladat:** A törpék matematikát tanulnak. Kuka épp az $a_n := \frac{100^n}{n!}$ sorozattal bajlódik. Azt mondja magában: „Nézzük csak, hogy is viselkedhet ez a sorozat... számoljunk egy kcsit... $a_1 = 100$; $a_2 = 5000$; $a_3 = 166666.6\ldots$ úgy tűnik, hogy ez a sorozat nő, méghozzá jó gyorsan. Tudor! A monoton sorozat az ugye konvergens is?" „Te anyaszomorító, hát még mindig nem tudod? Ha korlátos, akkor biztosan, egyébként akármi is lehet." „Na és ha monoton nő, és nem korlátos?" „Nohát ekkor mondjuk, hogy a $(+\infty)$-hez tart." „Akkor megvan! $a_n \to +\infty$."
Morgó közbemorog: „Kuka, te már megint nem figyeltél az előadáson. Ott elmondták, hogy a $\frac{2^n}{n!}$ sorozat 0-hoz tart." Kuka ránéz: „De ez nem az a sorozat, és azt is mondták, hogy $100^n$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint a $2^n$. Úgyhogy te itt csak ne szövegelj."
Segítsünk Kukának! Hol hibázott? Mi a helyzet hát ezzel a sorozattal?

Megoldás: itt

---

**4-8. Feladat:** Határozzuk meg az $a_n := \dfrac{\sqrt{3n^4 + n}}{7n^2 - 6}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

**4-9. Feladat:** Határozzuk meg az $a_n := \dfrac{2^{3n} + 5^n}{8^n + 3^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

**4-10. Feladat:** Határozzuk meg az $a_n := \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

**4-11. Feladat:** Határozzuk meg az $a_n := \left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

**4-12. Feladat:** Határozzuk meg az $a_n := \left(\dfrac{5n+6}{5n-1}\right)^{5n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

**4-13. Feladat:** Határozzuk meg az $a_n := \dfrac{\sqrt[3]{2n^4 - 3n}}{\sqrt{5n^3 + 8}}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

---

**4-14. Feladat:** Határozzuk meg a rekurzív módon definiált $a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{a_n + 1} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ sorozat határértékét, ha az létezik.

Megoldás: itt

---

**4-15. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi sorozat határértékét, ha az létezik:

$$a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Megoldás: itt

---

**4-1 Megoldás:**

Ugyanis

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 - x_n - \frac{1}{4} = -\left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 0.$$

4-2 **Megoldás:**

Felhasználjuk, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ monoton növő és ezért minden $n$ indexre $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$. Innen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 2^n \to +\infty,$$

és ezért

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty.$$

4-3 **Megoldás:**

Felhasználjuk, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, méghozzá monoton növő módon. Ezért

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{e} \to 1.$$

Következésképp a közrefogott $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat is 1-hez tart.

**4-4 Megoldás:**

$(a)$

$$a_n = \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(4n+1)(5n+1)(6n+1)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right)\left(6+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{20}.$$

$(b)$

$$a_n = \frac{n^2+2n}{n+3} - \frac{n^3+3n^2}{n^2-2} =$$

$$= \frac{n^4+2n^3-2n^2-4n-n^4-3n^3-3n^3-9n^2}{n^3+3n^2-2n-6} =$$

$$= \frac{-4n^3-11n^2-4n}{n^3+3n^2-2n-6} = \frac{-4-\frac{11}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{6}{n^3}} \to -4.$$

$(c)$

$$a_n = \frac{2^{n-2}+2}{2^{n+2}-2} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 2^n+2}{4\cdot 2^n-2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{2^n}}{4-\frac{2}{2^n}} \to \frac{1}{16}.$$

$(d)$

$$a_n = \frac{n^3+4^n}{n^5-4^n} = \frac{\frac{n^3}{4^n}+1}{\frac{n^5}{4^n}-1} \to -1.$$

$(e)$

$$a_n = \frac{(1+2n^2)^3}{(1+3n^3)^2} = \frac{1+6n^2+12n^4+8n^6}{1+6n^3+9n^6} = \frac{\frac{1}{n^6}+\frac{6}{n^4}+\frac{12}{n^2}+8}{\frac{1}{n^6}+\frac{6}{n^3}+9} \to \frac{8}{9}.$$

4-5 **Megoldás:**

Mindenekelőtt kiszámítjuk, hogy ha a sorozat egyáltalán konvergens, akkor mi lehet a határértéke. Jelölje $a := \lim a_n$, akkor a rekurzív definícióból: $a = -1000 + \frac{a}{1001}$, azaz $a = -1001$.

Most megmutatjuk, hogy a sorozat valóban konvergens (egyúttal újra megmutatva, hogy $(-1001)$-hez tart):

$$a_n + 1001 = 1 + \frac{a_{n-1}}{1001} = \frac{1}{1001} \cdot (a_{n-1} + 1001).$$

A jobb oldalt kifejezhetjük a még eggyel korábbi taggal, és így tovább:

$$a_n + 1001 = \frac{1}{1001^2} \cdot (a_{n-2} + 1001) = ... = \frac{1}{1001^n} \cdot (a_0 + 1001) = \frac{1001}{1001^n} \to 0.$$

4-6 **Megoldás:**

($a$) Ha a sorozat konvergens volna és határértéke valamilyen $x$ (valós!) szám lenne, akkor szükségképp fennállna az $x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{x}$ egyenlőség, ahonnan: $\frac{1}{2}x^2 = -3$ következne, ami pedig nem lehetséges (a bal oldal pozitív, a jobb oldal viszont negatív).

($b$) Ha a sorozat konvergens volna és határértéke valamilyen $a$ (valós!) szám lenne, akkor szükségképp fennállna az $a = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$ egyenlőség. Ennek az egyenletnek viszont nincs valós megoldása.

**4-7 Megoldás:**

Kukának nem volt igaza. Abból, hogy a $\frac{2^n}{n!}$ sorozat 0-hoz tart, ugyanakkor $100^n$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint a $2^n$, még nem következik, hogy a $\frac{100^n}{n!}$ sorozat a $(+\infty)$-hez tartana. A sorozat első néhány tagja valóban gyorsan nő, de aztán nagyobb indexekre a sorozat csökkenni kezd, és határértéke 0. A feladat tanulsága, hogy bár a sorozat első néhány tagjának viselkedéséből sokszor megsejthető az egész sorozat viselkedése, ez nem mindig van így, és a kapott sejtést mindig ellenőrizni kell!

4-8 **Megoldás:**

A számlálóban a gyök alatti kifejezés nyilván végtelenhez tart, s ebből következően az egész gyökös kifejezés is végtelenhez tart. Röviden, a tört „$\frac{\infty}{\infty}$ típusú”. Ilyenkor persze nem lehet külön-külön számítani a számláló és a nevező határértékét, majd azokat elosztani egymással. Egy standard megoldási módszer az, hogy egyszerűsítünk a nevezőben szereplő leggyorsabban növő taggal.

A nevezőben $n^2$ növekszik a leggyorsabban, így ezzel célszerű egyszerűsíteni. A számláló osztásánál ügyeljünk: gyökös kifejezés osztása esetén, a gyök alatt már az osztó *négyzetével* kell osztani. Tehát ha $n^2$-tel egyszerűsítünk, akkor a számlálóban a gyök alatt $n^4$-nel kell osztanunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^4+n}}{7n^2-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^3}}}{7-\dfrac{6}{n^2}}$$

Mivel $\frac{1}{n^3} \longrightarrow 0$ és $\frac{6}{n^2} \longrightarrow 0$, ezért a határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^3}}}{7-\dfrac{6}{n^2}} = \frac{\sqrt{3+0}}{7-0} = \frac{\sqrt{3}}{7}.$$

**4-9 Megoldás:**

Használjuk fel a hatványozás azonosságai közül a következőt: $a^{b\cdot c} = \left(a^b\right)^c$. Ebből következően: $2^{3n} = \left(2^3\right)^n = 8^n$, azaz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n} + 5^n}{8^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n + 5^n}{8^n + 3^n}$$

Most már egyértelmű, hogy $8^n$-nel célszerű egyszerűsíteni a törtet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n + 5^n}{8^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{5^n}{8^n}}{1 + \dfrac{3^n}{8^n}}$$

A számlálóban és nevezőben levő törteket írhatjuk egy-egy tört hatványaként is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{5^n}{8^n}}{1 + \dfrac{3^n}{8^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\dfrac{5}{8}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{3}{8}\right)^n}$$

Ámde $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{8}\right)^n = 0$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{8}\right)^n = 0$ , hiszen mindkét esetben $a^n$ típusú kifejezés határértékéről van szó, ahol teljesül, hogy $|a| < 1$. Innen már meghatározható az eredeti tört határértéke is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\dfrac{5}{8}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{3}{8}\right)^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

**4-10 Megoldás:**

Most egy hatvány határértéke a kérdés: a kitevő nyilván végtelenhez tart, az alap pedig 1-hez. Röviden: a feladat egy „$1^\infty$ típusú” határérték kiszámítása. Ez nem magától értetődő (ha pl. az alap egy 1-nél nagyobb számhoz tart, akkor könnyen megmutatható, hogy a sorozat $(+\infty)$-be tart, ha meg egy 1-nél kisebb abszolút értékű számhoz tart az alap, akkor a sorozat zérussorozat: jelen esetben a helyzet bonyolultabb). Az $e$ számot definiáló sorozat vizsgálatához hasonló meggondolásokat teszünk.

Nyilván: $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

A 4-16 példában bemutatott meggondolásokkal megmutatható (az Olvasó igazolja!), hogy az $(a_n)$ sorozat itt is monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens.

Elég tehát valamelyik *részsorozatának* kiszámítani a határértékét, hiszen az szükségképp megegyezik az eredeti sorozat határértékével. Vizsgáljuk az $a_{3n}$ részsorozatot:

$$a_{3n} = \left(1+\frac{3}{3n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \to e^3,$$

mert a külső zárójelben levő nevezetes sorozat $e$-hez tart.

Ezért végül azt kaptuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = e^3.$$

4-11 **Megoldás:**

Most egy hatvány határértéke a kérdés: a kitevő nyilván végtelenhez tart, az alap pedig 1-hez. Röviden: a feladat egy „$1^\infty$ típusú" határérték kiszámítása. Az $e$ számot definiáló sorozat vizsgálatához hasonló meggondolásokat teszünk.

Nyilván: $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$.

A kitevő $n$-je $3n$-re cserélhető, ha még az egész törtnek aztán vesszük az $1/3$-adik hatványát (használva a hatványozás azonosságait). Azaz

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{1/3}.$$

A külső zárójelben levő sorozat $e$-hez tart, mert a nevezetes, $e$-hez tartó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat egy részsorozata. Ennélfogva:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}.$$

Megjegyzés: A levezetés utolsó részében hallgatólagosan felhasználtuk *a köbgyökfüggvény folytonosságát*, azaz azt, hogy ha egy sorozat valamilyen számhoz tart, akkor a sorozat köbgyöke (azaz a sorozat tagjainak köbgyökeiből képezett sorozat) e szám köbgyökéhez tart. Ezt később sokkal nagyobb általánosságban is látni fogjuk.

4-12 **Megoldás:**

Mivel hatványról van szó, vizsgáljuk meg külön az alap és a kitevő határértékét. A kitevő nyilván $\infty$-hez tart, az alap pedig könnyen ellenőrizhetően 1-hez. Röviden: a feladat egy „$1^\infty$ típusú" határérték kiszámítása. Ez nem magától értetődő: ez $e$ számot definiáló sorozat vizsgálatához hasonló meggondolásokat teszünk.

Az alapot alakítsuk át $1 + (\text{zérussorozat})$ alakúvá:

$$\frac{5n+6}{5n-1} = \frac{(5n-1)+7}{5n-1} = \frac{5n-1}{5n-1} + \frac{7}{5n-1} = 1 + \frac{7}{5n-1}$$

Ezt felhasználva, a sorozat:

$$a_n = \left(\frac{5n+6}{5n-1}\right)^{5n-1} = \left(1 + \frac{7}{5n-1}\right)^{5n-1}$$

Jelölje a rövidség kedvéért $m := 5n-1$. Nyilván $n \to \infty$ esetén $m = 5n-1 \to \infty$. Formálisan írhatjuk tehát, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{7}{5n-1}\right)^{5n-1} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{7}{m}\right)^{m}.$$

(A formális helyettesítés mögött az áll, hogy az $b_m := \left(1 + \frac{7}{m}\right)^m$ sorozat egy részsorozata épp $a_n$, így elég megmutatni, hogy $(b_m)$ konvergens: ekkor az eredeti sorozat is az, és határértéke megegyezik $(b_m)$ határértékével.)

A 4-16 példában bemutatott meggondolásokkal megmutatható (az Olvasó igazolja!), hogy az $(b_m)$ sorozat monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens. Továbbá nyilván:

$$b_m = \left(\left(1 + \frac{7}{m}\right)^{m/7}\right)^7.$$

Elég tehát e sorozat helyett valamelyik *részsorozatának* kiszámítani a határértékét, hiszen az szükségképp megegyezik $(b_m)$ határértékével. Vizsgáljuk a $b_{7m}$ részsorozatot:

$$b_{7m} = \left(\left(1 + \frac{7}{7m}\right)^{7m/7}\right)^7 = \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right)^7 = e^7.$$

mert a külső zárójelben levő nevezetes sorozat $e$-hez tart.

Ezért végül azt kaptuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{5n-1}\right)^{5n-1} = e^7.$$

4-13 **Megoldás:**

Nyilvánvaló, hogy a számláló is és a nevező is végtelenhez tart, azaz egy „$\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú” határérték kiszámítása a feladat. A különböző gyökkitevők miatt kissé nehézkes lenne a leggyorsabban növekvő taggal végzett közvetlen egyszerűsítés, ezért először a számlálóban és a nevezőben is emeljük ki a gyök alatti leggyorsabban növekvő részt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4-3n}}{\sqrt{5n^3+8}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4\left(2-\dfrac{3}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^3\left(5+\dfrac{8}{n^3}\right)}}$$

A szorzatokból vonjunk tényezőnként gyököt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4\left(2-\dfrac{3}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^3\left(5+\dfrac{8}{n^3}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}\cdot\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}}$$

Bontsuk fel ezután a törtet két tört szorzatára.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}\cdot\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}}$$

A második tört határértékének meghatározása könnyű: ez a határérték nyilván $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}}$. Foglakozzunk ezért csak az első törttel. Mivel a számlálóban és a nevezőben csupán $n$ egy hatványa áll valamilyen gyök alatt, így törtkitevős hatványokat írhatunk inkább:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{4/3}}{n^{3/2}}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}}$$

A két hatvány hányadosát egyetlen hatványként is írhatjuk. A jobb oldal első tényezője a hatványozás azonosságainak használatával a következő:

$$\frac{n^{4/2}}{n^{3/2}} = n^{4/3-3/2} = n^{-1/6} = \frac{1}{n^{1/6}}$$

Ennek határértéke pedig zérus. Következésképp:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left( n^{(-1/6)} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}} = 0.$$

4-14 **Megoldás:**

*Ha* a sorozat konvergens, határértéke könnyan kiszámítható. Jelölje $a := \lim a_n$, akkor a rekurzív definícióból nyilvánvalóan:

$$a = \frac{1}{a+1},$$

azaz az egyelőre ismeretlen határérték megoldása az $a^2 + a - 1 = 0$ egyenletnek. Innen a határérték szükségképp megegyezik az alábbi számok valamelyikével:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Mivel a sorozat valamennyi eleme pozitív (ez azonnal következik a rekurzív definícióból), azért határértéke nem lehet negatív. Kaptuk, hogy *ha a sorozat konvergens*, akkor határértéke csakis az $a := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ szám lehet.

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat valóban konvergens. Tekitsük újra a rekurzív definíciót:

$$a_{n+1} := \frac{1}{a_n + 1},$$

és az $a$ szám definiáló egyenlőségét:

$$a = \frac{1}{a+1}$$

A két egyenlet különbségét képezve:

$$a_{n+1} - a = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a + 1 - a_n - 1}{(a_n+1)(a+1)} = \frac{a - a_n}{(a_n+1)(a+1)}$$

Az egyenlőség abszolút értékét képezve, $(n+1)$ helyett az $n$ index mellett:

$$|a_n - a| = \frac{1}{(a_n+1) \cdot (a+1)} \cdot |a_{n-1} - a|$$

A jobb oldalt növeljük, ha a tört nevezőjét csökkentjük, $(a_{n+1} + 1)$ helyébe egyszerűen 1-et írva:

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{a+1} \cdot |a_{n-1} - a|$$

A jobb oldalon ugyanezt az egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk, míg a $|a_0 - a|$-t el nem érjük:

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{a+1} \cdot |a_{n-1} - a| \leq \left(\frac{1}{a+1}\right)^2 \cdot |a_{n-2} - a| \leq ... \leq \left(\frac{1}{a+1}\right)^n \cdot |a_0 - a| \to 0,$$

ha $n \to +\infty$, mivel nyilván $0 < \frac{1}{a+1} < 1$. Ezzel megmutattuk, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens, és határértéke:

$$\lim a_n = a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

**4-15 Megoldás:**

Felhasználva a 2-5 példa eredményét:

$$a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Innen pedig:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

# 10. lecke

# Végtelen sorok

# 5. Végtelen sorok

Ebben a részben speciális sorozatokról lesz szó, amelyek azonban számos területen annyira fontosak, hogy a sorozatok általános elméletétől elkülönítve tárgyaljuk. Elöljáróban kiemeljük, hogy a sorok bevezetése *végtelen tagszámú összeg* pontos definiálását jelenti. Látni fogjuk, hogy a véges összegek jól ismert tulajdonságai itt már nem mindig igazak.

A tárgyalást a valós számok körében végezzük, de megemlítjük, hogy *komplex* tagú sorok bevezetése is nehézség nélkül, a valóshoz hasonlóan történhet.

## 5.1. Végtelen sorok, konvergenciájuk

**5-1. Definíció:** Legyen $(a_n) \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges sorozat. Tekintsük az ebből képezett

$$S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(rövid jelöléssel: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ) új sorozatot (a *részletösszegek* sorozatát). Ha az $(S_n)$ sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

*végtelen sornak van összege*, vagy *konvergens*. $(S_n)$ határértékét pedig a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sor *összegének* nevezzük. Ha $(S_n) \to +\infty$ (vagy $(S_n) \to -\infty$), akkor azt mondjuk, hogy a sor összege $+\infty$ (ill. $-\infty$). Ennek jele: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ (ill. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$).

**Megjegyzés:** A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sort a szemléletesség kedvéért sokszor így is írjuk: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Konkrét sorok esetén azonban mindig világos kell, hogy legyen, hogy a ki nem írt tagok pontosan mivel egyenlők.

Nem kötelező a tagok indexét 1-től indítani: sokszor célszerű 0-tól, vagy akár egy 1-nél nagyobb pozitív számtól. Ez a sor konvergenciájának fogalmán nem változtat. Világos az is, hogy ha a sor tagjai közül *véges sokat* megváltoztatunk, ez a sor konvergenciájának tényét nem befolyásolja, a sor összegét természetesen igen.

**5-1. Példa:** Tetszőleges $q \in \mathbf{R}$ szám esetén, amelyre $|q| < 1$, a

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

ún. *végtelen mértani sor* konvergens, összege pedig $\frac{1}{1-q}$.

**Bizonyítás:**

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n.$$

Ez a soktagú összeg zárt alakra hozható, mert

$$(1-q)S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1},$$

ahonnan

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q \cdot \frac{q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$

□

Nem konvergens sorokra a legegyszerűbb példa a $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$ sor, melynek összege nyilván $+\infty$.

További példák:

**5-2. Példa:** A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

sor konvergens, összege 1.

**Bizonyítás:**

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

□

**5-3. Példa:** A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

sor (*hiperharmonikus sor*) konvergens.

Bizonyítás:

Az $(S_n)$ részletösszeg-sorozat nyilván monoton növő (csupa pozitív számokat adunk össze), és felülről korlátos, mert:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot n} \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

Következésképp $(S_n)$ konvergens is. $\square$

Amint az az bizonyításából kiderül, a fenti sor konvergenciájának ténye nagyon egyszerűen igazolható. Sokkal nehezebb feladat a sorösszeg kiszámítása. (Érdekességképpen megemlítjük, hogy a fenti hiperharmonikus sor összege $\pi^2/6$.) Általában is igaz, hogy sokszor egészen más eszközöket igényel a konvergencia meglétének vizsgálata, mint a sorösszeg kiszámítása. Vizsgálatainkat az előbbi problémakörre korlátozzuk. Az olyan jellegű tételeket, melyek segítségével a sor konvergenciája (vagy divergenciája) igazolható, *konvergenciakritériumoknak* nevezzük.

## 5.2. Konvergenciakritériumok

Sorozatokra a Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával. Ennek a ténynek speciálisan egy sor részletösszegeire való átfogalmazása azonnal egy konvergenciakritériumot eredményez a sorokra vonatkozóan.

**5-1. Állítás:** (Cauchy-kritérium sorokra). A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $m \geq n \geq N$ indexekre a $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül.

**5-4. Példa:** A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

sor (*harmonikus sor*) divergens, összege $(+\infty)$.

**Bizonyítás:**

Azt mutatjuk meg, hogy a sor *nem* teljesíti a Cauchy-kritériumot. Valóban, pl. $\epsilon := \frac{1}{2}$-re nem létezik a kívánt tulajdonságú küszöbindex, mert tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és $m := 2n$ indexek mellett:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

□

A Cauchy-kritériumból azonnal következik a sorok konvergenciájának egy egyszerű szükséges feltétele.

5-2. Következmény: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, akkor a sor tagjainak sorozata szükségképp zérussorozat, azaz $a_n \to 0$.

Bizonyítás:

A Cauchy-kritériumban szereplő $m$ indexet speciálisan $m := n$-nek választva kapjuk, hogy minden $\epsilon > 0$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ indexre $\left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \varepsilon$, azaz $|a_n| < \varepsilon$ teljesül, ezért valóban, $a_n \to 0$. $\square$

Megjegyzés: A fenti következmény egy hasznos átfogalmazása: ha a sor tagjai nem alkotnak zérussorozatot, azaz $a_n \to 0$ nem teljesül, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor biztosan divergens.

A fenti következmény megfordítása nem igaz. Abból, hogy $a_n \to 0$, még nem következik a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergenciája. Ez a helyzet pl. a harmonikus sor esetében is. Bizonyos speciális esetben, további feltételek mellett ez mégis igaz.

5-3. Következmény: Legyen $(a_n)$ nemnegatív tagú, monoton fogyó zérussorozat: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, $a_n \to 0$ . Akkor az

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

*váltakozó előjelű sor* (vagy *Leibniz-sor*) konvergens.

Bizonyítás:

A Cauchy-tulajdonságot fogjuk igazolni. Az $n$-edik részletösszeg: $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots \pm a_n$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $a_n \to 0$ miatt van oly $N$ index, hogy $a_N < \varepsilon$. Legyen $n \geq N$ teszőleges, akkor

$$|S_{n+1} - S_n| = a_{n+1} \leq a_N < \varepsilon,$$

$$|S_{n+2} - S_n| = |a_{n+1} - a_{n+1}| \leq a_{n+1} \leq a_N < \varepsilon,$$

$$|S_{n+3} - S_n| = |a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1}| \leq a_{n+1} \leq a_N < \varepsilon,$$

és így tovább. Így minden $m \geq n \geq N$ esetén

$$|S_m - S_n| \leq a_{n+1} \leq a_N < \varepsilon.$$

A részletösszegek sorozata tehát Cauchy-sorozat, ezért a sor konvergens. □

**5-5. Példa:** Az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ sor konvergens.

Három, a gyakorlatban jól használható konvergenciakritérium következik.

**5-4. Tétel:** (majoráns kritérium). Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sorhoz van olyan konvergens $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor, hogy $|a_k| \leq b_k$ teljesül minden $k$ indexre (*majoráns sor*), akkor az eredeti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens, és a sorösszegre teljesül, hogy $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Bizonyítás:

A Cauchy-kritériumot fogjuk használni. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens, azért $\varepsilon$-hoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $m \geq n \geq N$ indexekre $\sum\limits_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$ teljesül. Innen, használva az $|a_k| \leq b_k$ egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon,$$

tehát az eredeti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is kielégíti a Cauchy-kritériumot, ezért konvergens. A sor részletösszegeit pedig a következőképp becsülhetjük:

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

mert a nemnegatív tagú $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ majoráns sor részletösszegeinek sorozata nyilván monoton növő. Kaptuk, hogy

$$|S_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

innen a bal oldalon $n \to +\infty$ esetben is:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

□

A majoráns kritérium lényege, hogy ha az eredeti sor tagjait kicseréljük abszolút értéküknél nem kisebb pozitív számokra úgy, hogy a módosított sorról (a majoráns sorról) sikerül kimutatni a konvergenciát, akkor ez az eredeti sorra nézve is biztosítja a konvergenciát. Természetesen arra törekszünk, hogy a majoráns sor minél egyszerűbb (ill. már ismert konvergens sor) legyen.

**5-6. Példa:** A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$$

sor minden $\alpha \geq 2$ (nem feltétlen egész!) szám esetén konvergens.

**Bizonyítás:**

A sort ui. a konvergens $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ hiperharmonikus sor majorálja, így maga is konvergens. $\square$

**Megjegyzés:** Megmutatható – itt nem részletezzük –, hogy a a fenti sor nemcsak $\alpha \geq 2$, de már $\alpha > 1$ esetben is konvergens. A sor összege természetesen az $\alpha$ kitevő függvénye. Ezt a függvényt – amely egyébként a számelméletben igen fontos szerepet játszik – *Riemann-féle $\zeta$-függvénynek* nevezzük.

**5-2. Definíció:** Az $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a tagok abszolút értékeiből képzett $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor konvergens.

Nem nyilvánvaló, hogy egy abszolút konvergens sor konvergens is, de a majoráns kritériumból ez már egyszerűen következik.

**5-5. Következmény:** Minden abszolút konvergens sor konvergens is.

**Bizonyítás:**

Ha ui. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ egy konvergens majoráns sora, így az eredeti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens. $\square$

**5-6. Következmény:** Ha egy sornak létezik konvergens majoráns sora, akkor az eredeti sor abszolút konvergens (nemcsak konvergens).

**Bizonyítás:**

A majoráns kritérium ui. egyidejűleg az abszolút értékekből képezett sorra is fennáll. $\square$

Megjegyezzük, hogy az egyik előző példában szereplő Leibniz-típusú sor konvergens, de nem abszolút konvergens, ui. a tagok abszolút értékei által alkotott sor a divergens harmonikus sor. Érdekességképp megjegyezzük még, hogy konvergens, de nem abszolút konvergens sorok esetében a végtelen tagú összeg, meglepő módon, már nem asszociatív. A tagok alkalmas cseréjével elérhető, hogy a kapott sor összege más és más legyen, sőt az is, hogy az átrendezett sor egyáltalán ne legyen konvergens. Ez is mutatja, hogy a végtelen tagú összegekre a véges összegekre jól ismert műveleti azonosságok már nem feltétlen teljesülnek. Ez a fajta anomália abszolút konvergens sorok esetén nincs, azok tetszőlegesen átrendezhetők, és az átrendezett sor továbbra is abszolút konvergens marad, a sorösszeg pedig nem változik.

**5-7. Tétel:** (hányadoskritérium). Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha van olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy minden $n$ indexre $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

**Bizonyítás:**

Az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ feltételt ismételten alkalmazva a megelőző indexekre is:

$$|a_n| \leq q \cdot |a_{n-1}| \leq q^2 \cdot |a_{n-2}| \leq \ldots \leq q^n \cdot |a_0|.$$

Kaptuk, hogy a sort a konvergens $|a_0| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mértani sor majorálja, így maga is abszolút konvergens. □

**5-8. Tétel:** (gyökkritérium). Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha van olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy minden $n$ indexre $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

**Bizonyítás:**

Az $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ feltételből: $|a_n| \leq q^n$. Így a sort a konvergens $|a_0| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mértani sor majorálja, ezért maga is abszolút konvergens. □

**5-7. Példa:** A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$$

sor abszolút konvergens.

Bizonyítás:

A hányadoskritériumot alkalmazva:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{2}{3},$$

tehát a sor valóban abszolút konvergens.

A gyökkritériumot is alkalmazhatjuk:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}.$$

A Bernoulli-egyenlőtlenségből: $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n \geq n$, innen pedig

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{2^n}}{3} = \frac{2}{3},$$

amiből szintén következik a sor abszolút konvergenciája. □

Megjegyzés: Mivel a sor konvergenciájának ténye nem változik, ha a sor véges sok tagját megváltoztatjuk, világos, hogy a hányados-, ill. a gyökkritériumban szereplő egyenlőtlenségeket nem kell valójában minden $n$ indexre megkövetelni. Elég, ha ezek csak valamilyen $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexet meghaladó indexekre teljesülnek. Ez a feltétel tovább gyengíthető. Ha történetesen a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (ill. a $\sqrt[n]{|a_n|}$) sorozat *maga is konvergens, és határértéke 1-nél kisebb,* akkor véges sok kivétellel teljesül pl. az

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1$$

(ill. az

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \lim\sqrt[n]{|a_n|}\right) < 1$$

egyenlőtlenség, ami már elegendő a sor abszolút konvergenciájához.

Ezt az észrevételt külön állításban is megfogalmazzuk.

**5-9. Állítás:** Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor.

$(a)$ Ha az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ sorozat konvergens, és $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

$(b)$ Ha az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozat konvergens, és $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

Ha valamelyik szóban forgó határérték épp 1-gyel egyenlő, akkor a konvergencia azzal a kritériummal nem dönthető el. Pl. a harmonikus sor és a hiperharmonikus sor esetén $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ is és $\sqrt[n]{|a_n|}$ is egyaránt 1-hez tartanak, ugyanakkor a harmonikus sor divergens, míg a hiperharmonikus sor konvergens.

Gyakori hiba a hányados- és gyökkritérium alkalmazásakor, hogy csak azt ellenőrizzük, hogy $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ill. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ teljesül-e, és ha igen, ebből (hibásan) a sor abszolút konvergenciájára következtetünk. Az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, ill. a $\sqrt[n]{|a_n|}$ szám egy *1-nél kisebb pozitív konstans alatt kell, hogy maradjon*, méghozzá $n$-től függetlenül. A fenti gondolatmenet hibáját ismét jól példázza a harmonikus sor, ahol $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}$, ami mindig kisebb 1-nél, de a sor divergens. Itt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, így nincs olyan 1-nél kisebb pozitív konstans, hogy az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ hányados ez alatt maradna minden $n$ indexre.

További példák.

**5-8. Példa:** Legyen $|x| < 1$ tetszőleges valós szám. Akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} nx^n$ sor abszolút konvergens.

**Bizonyítás:**

A hányadoskritériummal

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} = |x| \cdot \frac{n+1}{n} \to |x| < 1.$$

A gyökkritériumot is használhatnánk, mivel

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{n} \to |x| < 1.$$

Mindkét esetben a kritérium teljesül, amiből az abszolút konvergencia következik. □

A gyakorlatban a hányados- és a gyökkritérium alkalmazhatósági köre lényegében ugyanaz.

Ezt a részt a sorok divergenciájának eldöntését célzó kritériumokkal zárjuk, melyek formailag nagyon hasonlók a konvergenciakritériumokhoz:

**5-10. Állítás:** Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sorhoz van olyan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ún. *minoráns sor*, hogy $a_k \geq b_k \geq 0$ teljesül minden $k$ indexre és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$, akkor az eredeti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is divergens, összege $+\infty$.

**Bizonyítás:**

Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens lenne, akkor majoráns sora lenne $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$-nak, így a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sor is konvergens volna. □

**5-11. Állítás:** Legyen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ teljesül minden $n$ indexre, akkor a sor divergens.

Bizonyítás:

Ekkor ui. a sor tagjainak abszolút értékei monoton növő sorozatot alkotnak, így a konvergenciához szükséges $a_n \to 0$ feltétel nem teljesül. $\square$

**5-12. Állítás:** Legyen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ teljesül minden $n$ indexre, akkor a sor divergens.

Bizonyítás:

Ekkor ui. a sor tagjaira $|a_n| \geq 1$, így a konvergenciához szükséges $a_n \to 0$ feltétel nem teljesül. $\square$

Az utóbbi három állításban a divergencia ténye (a konvergenciakritériumokhoz hasonlóan) akkor is igaz marad, ha a tett feltételek nem mindegyik $n$ indexre teljesülnek, hanem csak valamely $N$ küszöbindexet meghaladó indexekre.

# 11. lecke

## Sorok Cauchy-szorzata és az exponenciális sor

## 5.3. Sorok Cauchy-szorzata

**5-3. Definíció:** A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ és a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ végtelen sorok *Cauchy-szorzatán* azt a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0 \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

A definíciót az alábbi észrevétel indokolja. Tegyük fel, hogy az $a_k$, $b_k$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ tagok közül csak véges sok különbözik 0-tól. Ekkor a $P(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és a $Q(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ előírással értelmezett függvények polinomok. Kettőjük $P(x)Q(x)$ szorzata szintén polinom, melynek

0. fokú tagja: $a_0 b_0$,

1. fokú tagjának együtthatója: $a_0 b_1 + a_1 b_0$,

2. fokú tagjának együtthatója: $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$,

és így tovább, azaz a szorzatpolinom együtthatói épp az eredeti sorok Cauchy-szorzatának egyes tagjai. Az is világos, hogy ekkor $P(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $Q(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, és $P(1)Q(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ , azaz

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

ami indokolja, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ sort miért nevezhetjük szorzatnak.

Ez a meggondolás nem működik akkor, amikor *végtelen sok* $a_k$,$b_k$ együttható különbözik 0-tól (már láttuk, hogy végtelen tagú összeg esetén nem feltétlen teljesül az összeg asszociativitása). Várható tehát, hogy a fenti $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ egyenlőség teljesüléséhez (tehát a Cauchy-szorzatsor konvergenciájához) további feltételek szükségesek.

A következő tétel szerint ehhez az *abszolút* konvergencia elegendő. A tételt bizonyítás nélkül közöljük (a bizonyítás nem épít új fogalomra, tételre, de hosszadalmas).

**5-13. Tétel:** Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok mindegyike abszolút konvergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ Cauchy-szorzatsor is abszolút konvergens, és

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

**5-9. Példa:** Legyen $|x| < 1$ tetszőleges valós szám. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

sor konvergens, és számítsuk ki az összegét.

*Megoldás*. Az állítás azonnal következik az előző tételből, ha észrevesszük, hogy a sor nem más, mint az abszolút konvergens $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ mértani sor önmagával képezett Cauchy-szorzata. Mivel e mértani sor összege $\frac{1}{1-x}$, azért

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

## 5.4. Az exponenciális sor és az exponenciális függvény

**5-4. Definíció:** Legyen $x \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. A

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

végtelen sort *exponenciális sornak* nevezzük.

**5-14. Állítás:** Az $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ exponenciális sor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén abszolút konvergens.

**Bizonyítás:**

A hányadoskritérium alapján:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0,$$

tehát a sor valóban abszolút konvergens. (Megjegyezzük, hogy a gyökkritériumot is alkalmazhattuk volna.) $\square$

Nem véletlenül nevezzük a fenti sort exponenciális sornak. Meg fogjuk mutatni, hogy az így definiált függvény megegyezik az $e$ alapú exponenciális függvénnyel. A definícióból nyilvánvaló, hogy $\exp(0) = 1$; most azt mutatjuk meg, hogy $\exp(1) = e$.

**5-15. Állítás:** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Bizonyítás:

Tekintsük a részletösszegeket: $S_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots$. Már tudjuk, hogy $(S_n)$ konvergens, jelölje $S := \lim S_n$. Megmutatjuk, hogy $e \leq S$, és ugyanakkor $e \geq S$, innen $e = S$ következik, amivel az állítás igazolva lesz.

A binomiális tételt használva:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n^2}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n^3}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

A bal oldal határértéke $e$, a jobb oldalé $S$, így $e \leq S$.

Másrészt, legyen $m \in \mathbf{N}$ tetszőleges index, és $n \geq m$. Ismét a binomiális tételt használjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

A jobb oldal csak csökkenhet, ha abból néhány tagot elhagyunk. Megtartva csak az első $m+1$ db tagot, innen:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{1}{n^m} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}.$$

Az $n \to +\infty$ határátmenetet véve kapjuk, hogy

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

Ez igaz tetszőleges $m$ indexre, innen ($m \to +\infty$ esetén is) $e \geq S$, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Most megmutatjuk, hogy az exponenciális sor, mint $x$ függvénye, teljesíti hatványozás azonosságait.

**5-16. Állítás:** Tetszőleges $x, y \in \mathbf{R}$ számokra teljesül, hogy:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y).$$

**Bizonyítás:**

Elég azt igazolni, hogy az $\exp(x)$ és az $\exp(y)$ sorok Cauchy-szorzata épp $\exp(x+y)$.

Jelölje $c_0, c_1, c_2, \ldots$ a Cauchy-szorzat tagjait, akkor a binomiális tételt alkalmazva:

$$c_k = \frac{x^0}{0!}\cdot\frac{y^k}{k!} + \frac{x^1}{1!}\cdot\frac{y^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^0}{0!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(y^k + \frac{k!}{1!(k-1)!}xy^{k-1} + \frac{k!}{2!(k-2)!}x^2y^{k-2} + \ldots + \frac{k!}{k!0!}x^k\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(y^k + \binom{k}{1}xy^{k-1} + \binom{k}{2}x^2y^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k}x^k\right) = \frac{1}{k!}(x+y)^k,$$

tehát $c_k$ valóban $\exp(x+y)$ sorának $k$-adik tagja. $\square$

Az állítás ismételt alkalmazásával és az $\exp(0) = 1$ egyenlőség felhasználásával azonnal adódik az

**5-17. Következmény:** Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ számokra:
$(a)$ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$,
$(b)$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Speciálisan, egész számok esetén, $\exp(1) = e$ felhasználásával kapjuk, hogy:

**5-18. Következmény:** $\exp(-n) = \frac{1}{e^n}$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

Ha pedig $p,q \in \mathbf{Z}$ egész számok, akkor

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}\right) = \exp(p) = e^p.$$

**5-19. Következmény:** $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{p/q}$ minden $p,q \in \mathbf{Z}$-re $(q \neq 0)$.

Látjuk tehát, hogy az exp függvény megegyezik az $e$ alapú exponenciális függvénnyel (legalábbis a racionális számok halmazán). Ezért a későbbiekben az $\exp(x)$ jelölés helyett a szokásos $e^x$ jelölést fogjuk használni.

Ezt a részt az exponenciális függvényre vonatkozó két fontos egyenlőtlenséggel zárjuk:

**5-20. Állítás:** $(a)$ Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén $e^x \geq 1 + x$.
$(b)$ Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq x \leq 1$ esetén $e^x \leq 1 + 2x$.

Bizonyítás:

$(a)$ Legyen először $x \geq 0$, akkor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \geq 1 + x,$$

mert minden elhagyott tag nemnegatív.

Legyen most $x < 0$ és $y := -x$. Ekkor

$$e^y(1-y) = \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) - \left(y + \frac{y^2}{1!} + \frac{y^3}{2!} + \frac{y^4}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!}\right) y^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) y^3 + \ldots \leq 1,$$

mert minden elhagyott tag 0-nál nem nagyobb. Innen pedig $e^{-x}(1+x) \leq 1$, azaz $e^x \geq 1 + x$ következik.

$(b)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \leq 1 + x + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) \leq$$

$$\leq 1 + x + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) \leq 1 + 2x.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy az $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ végtelen mértani sor összege 1, valamint azt, hogy $0 \leq x \leq 1$ esetén $x^2 \leq x$. $\square$

Megjegyzés: Eddig mindig valós sorozatokkal és sorokkal foglalkoztunk. Elvileg semmi akadálya sincs *komplex* sorozatok és sorok bevezetésének és vizsgálatának. A korlátosság, a konvergencia, a Cauchy-tulajdonság definiálása értelemszerű változtatásokkal történik (a komplex abszolút érték használatával). A legtöbb tétel igaz marad, értelemszerűen a monoton sorozatok és a végtelenbe tartó sorozatra vonatkozó eredmények kivételével (a komplex számok körében nincs értelmezve a rendezési reláció). A fogalmak és tételek pontos átfogalmazásától eltekintünk, de megjegyezzük, hogy pl. az exponenciális függvény ily módon nehézség nélkül kiterjeszthető a komplex számok $\mathbf{C}$ halmazára is.

# 12. lecke

## Ellenőrző kérdések és feladatok

## 5.5. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** Az egyik sorösszeg nem létezik. Melyik?

☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

**2.** Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sornak létezik összege, és az pozitív, akkor az $(a_n)$ sorozat szükségképp

☐ divergens
☐ konvergens, és határértéke pozitív
☐ zérussorozat
☐ monoton fogyó

**3.** Valamelyik végtelen sor nem konvergens. Melyik?

☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4}$

**4.** Ha egy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, akkor a tagjaiból álló $(a_n)$ sorozatra szükségképp teljesül, hogy

☐ $a_n$ monoton ☐ $|a_n| < 1$ minden $n$-re ☐ $a_n \to 0$ ☐ $a_n \to +\infty$

**5.** Legyen $a_n := \dfrac{1}{2n}$. Akkor az $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ sor

- ☐ divergens
- ☐ a majoráns kritérium miatt konvergens, mert $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$
- ☐ a hányadoskritérium miatt konvergens, mert $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- ☐ a gyökkritérium miatt konvergens, mert $\sqrt[n]{a_n} < 1$

**6.** Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, és összege $(-1)$, akkor az $(a_n)$ sorozat szükségképp

- ☐ 0-hoz tart
- ☐ határértéke negatív
- ☐ $-\infty$-be tart
- ☐ divergens

**7.** Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, és $a_n \to 1$, akkor az $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor

- ☐ konvergens, és összege pozitív
- ☐ konvergens, de összege lehet 0 is
- ☐ abszolút konvergens
- ☐ összege $+\infty$

**8.** Az alábbi sorok közül csak az egyik konvergens. Melyik?

☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k!}{2^k}$

**9.** Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, és összege $2$, akkor az $(a_n)$ sorozat szükségképp

☐ divergens
☐ 0-hoz tart
☐ 2-höz tart
☐ felülről nem korlátos

**10.** Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor összege $+\infty$, akkor az $(a_n)$ sorozat szükségképp

☐ $+\infty$-be tart
☐ pozitív számhoz tart
☐ 0-hoz tart
☐ nem tart negatív számhoz

End Quiz

Score:

## 5.6. Feladatok

**5-1. Feladat:** A legújabb kutatások alkalmával rábukkantak egy eleddig ismeretlen egyiptomi piramis romjaira. A piramis lépcsőzetes volt, sok emelettel, de hogy pontosan hány emeletes volt, azt nem tudni. Fennmaradt viszont egy töredékes építészeti leírás, miszerint „...az első emelet hossza és szélessége legyen 288 könyök, magassága 40 könyök... Minden emelet legyen arányosan kisebb, mint a megelőző... a harmadik emelet szélessége tehát már csak 200 könyök...”. Hány könyök lehetett legfeljebb a piramis teljes magassága?

Megoldás: itt

---

**5-2. Feladat:** Konvergensek-e a következő sorok?

(*a*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \cdot \sin \frac{k\pi}{2}$$

(*b*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3+2k+1}$$

(*c*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k^3+k^4}{2^k+3^k+4^k}$$

(*d*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k^2-1} + \frac{k}{k^2+1} \right)$$

Megoldás: itt

**5-3. Feladat:** Konvergensek-e a következő sorok?

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k}$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{k}{2}}$$

(e)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

Megoldás: itt

**5-4. Feladat:** Legyen

$$a_1 := \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n - 1 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Konvergens-e a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

sor?

**Megoldás:** itt

---

**5-5. Feladat:** Konvergens-e a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$$

sor?
Konvergens-e a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}$$

sor?

**Megoldás:** itt

---

5-6. Feladat: Konvergens-e a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{2^k}$$

sor? Ha igen, mi az összege?

Megoldás: itt

5-7. Feladat: Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

számítsuk ki a páratlan számok reciprokainak négyzetösszegét, azaz az alábbi sorösszeget:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

Megoldás: itt

**5-1 Megoldás:**

A töredékből kiderül, hogy az emeletek adatai azonos $q$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. A kvóciens értéke a szélességadatokból számítható:

$$q^2 = \frac{200}{288},$$

innen

$$q = \frac{10}{12}.$$

Az egyes emeletek magasságai innen $40$, $40q$, $40q^2$, $40q^3$,... könyök. A teljes magasság tehát legfeljebb a

$$40 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergens mértani sor összege, azaz $\frac{40}{1-\frac{10}{12}} = 240$ könyök.

**5-2 Megoldás:**

$(a)$ A sor konvergens, mert a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens hiperharmonikus sor majorálja.

$(b)$ A sor konvergens, mert a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens hiperharmonikus sor majorálja, ui. a sor tagjaira:

$$\left| \frac{k-1}{k^3+2k+1} \right| \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

$(c)$ A sor konvergens, mert a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^4}{4^k}$ konvergens sor majorálja. Ez utóbbi valóban konvergens, mert a gyökkritériumot alkalmazva:

$$\sqrt[n]{\frac{3k^n}{4^n}} = \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^4 \cdot \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}.$$

$(d)$ A sor tagjai:

$$\frac{k}{k^2-1} + \frac{k}{k^2+1} = k \cdot \frac{k^2+1-k^2+1}{k^4-1} = \frac{2k}{k^4-1} \leq \frac{2k}{k^4 - \frac{k^4}{2}} = \frac{4}{k^3}$$

Ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3}$ sor konvergens majoráns sor, tehát az eredeti sor konvergens.

5-3 **Megoldás:**

$(a)$ A sor nem konvergens, mert tagjai nem alkotnak zérussorozatot: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1$.

$(b)$ A gyökkritériumot alkalmazva:

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

így a sor konvergens.

$(c)$ A sor tagjai:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{e},$$

tehát nem alkotnak zérussorozatot, így a sor nem konvergens.

$(d)$ A sor tagjaira teljesül, hogy

$$\frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{2}{k(k-1)} \leq \frac{2}{k^2-\frac{k^2}{2}} = \frac{4}{k^2},$$

tehát a sort a konvergens hiperharmonikus $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ sor majorálja. Ezért az eredeti sor is konvergens.

$(e)$ A sor konvergens, mert az $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ konvergens hiperharmonikus sor majorálja.

**5-4 Megoldás:**

Nem konvergens, mert a rekurzív definícióból azonnal következik, hogy a sorozat határértéke 0 nem lehet, azaz a sor tagjai nem alkotnak zérussorozatatot.

5-5 **Megoldás:**

A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$$

sor konvergens, ui. a gyökkritérium alapján

$$\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{3} \to \frac{1}{3}.$$

A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}$$

sor viszont nem konvergens, mert a sor tagjai nem alkotnak zérussorozatatot, ui.

$$\frac{3^k}{k^3} \to +\infty.$$

5-6 **Megoldás:**

A sor konvergens, mert konvergens mértani sor majorálja. A sor összege:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{2^k} = \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} + ... =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + ...\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + ...\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{2}{5}.$$

5-7 **Megoldás:**

A kérdéses sor nyilván konvergens, mert a konvergens hiperharmonikus sor majorálja. Jelölje $S$ az egyelőre ismeretlen sorösszeget:

$$S := \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

A hiperharmonikus sorban csoportosítsuk át a tagokat: vegyük külön a páros ill. a páratlan számok reciprokainak négyzetét:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

A páros számok négyzeteiből $2^2$ mindig kiemelhető:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right) + \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6},$$

azaz

$$S + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Innen végül:

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Megjegyzés: A levezetésben hallgatólagosan felhasználtuk az összeg asszociativitását, azaz a sor átrendezhetőségét. Ez *véges* összegre nyilvánvaló, de *végtelen* összegre egyáltalán nem. Igazolható azonban (a részleteket mellőzzük), hogy ha egy sor *abszolút konvergens*, akkor minden átrendezése is az, és az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.

# 13. lecke

## Egyváltozós valós függvények, folytonosságuk

# 6. Egyváltozós valós függvények

## 6.1. Alapfogalmak

Mindenekelőtt összefoglaljuk a valós függvényekkel kapcsolatos legfontosabb fogalmakat.

Függvények vizsgálatakor mindig tisztázni kell a függvény értelmezési tartományát. *Ha egy függvényt valamilyen formulával adunk meg, és nem jelöljük az értelmezési tartományát, akkor azon mindig* $\mathbf{R}$*-nek azt a legbővebb részhalmazát értjük, amelyen az adott formula értelmezhető.*

6-1. Definíció: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény (*szigorúan*) *monoton nő az* $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ *intervallumon*, ha minden $a < x < y < b$ szám esetén $f(x) \leq f(y)$ (ill. $f(x) < f(y)$).
Hasonlóan, az $f$ függvény (*szigorúan*) *monoton fogy az* $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ *intervallumon*, ha minden $a < x < y < b$ szám esetén $f(x) \geq f(y)$ (ill. $f(x) > f(y)$).

*Elnevezés*. Az $x \in \mathbf{R}$ szám $\delta > 0$ *sugarú környezetén* az $(x-\delta,x+\delta)$ intervallumot értjük. *Bal oldali* (*jobb oldali*) *környezet* alatt pedig egy $(x-\delta,x]$ (ill. $[x,x+\delta)$) alakú intervallumot értünk ($\delta > 0$ ).

6-2. Definíció: Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy $f$-nek az $x_0$ szám *lokális minimumhelye*, ha $x_0$-nak van oly $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ környezete, hogy ott az $f(x_0)$ függvényérték minimális, azaz minden $x \in (x_0-\delta,x_0+\delta)$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül. A lokális minimum *szigorú*, ha minden $x \in (x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) > f(x_0)$ teljesül. Hasonlóan definiáljuk a (*szigorú*) *lokális maximumhelyet* is.

A következő állítás a definíciók alapján nyilvánvaló.

6-1. Állítás: Ha az $f$ függvény (szigorúan) monoton nő az $(x_0-\delta,x_0]$ intervallumon és (szigorúan) monoton fogy az $[x_0,x_0+\delta)$ intervallumon, akkor $f$-nek $x_0$-ban (szigorú) lokális maximuma van.

Hasonló állítás érvényes a (szigorú) lokális minimumra is.

Legyen most $f$ olyan, hogy $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$.

**6-3. Definíció:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

A szokásos függvényábrázolásában páros függvények grafikonja a 2. tengelyre (szokásos elnevezéssel: az $y$-tengelyre), páratlan függvények grafikonja az origóra szimmetrikus.

**6-1. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^n$ $(n \in \mathbf{N})$ hatványfüggvény páros $n$ kitevő esetén páros, páratlan $n$ kitevő esetén pedig páratlan.

**6-4. Definíció:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *periodikus*, és $\lambda \in \mathbf{R}$ egy *periódusa* (röviden: az $f$ függvény $\lambda$-*periodikus*), ha $f(x + \lambda) = f(x)$ teljesül minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy ha $f$ periodikus a $\lambda$ periódussal, akkor minden egész $k \in \mathbf{Z}$ szám esetén $k\lambda$ periódussal is periodikus. A legkisebb pozitív periódust (ha ilyen egyáltalán létezik) *alapperiódusnak* is nevezzük. A későbbiekben periódus alatt mindig alapperiódust értünk.

**6-2. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \sin x$ függvény periodikus, $2\pi$ periódussal.

## 6.2. Határérték és folytonosság

6-5. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *határértéke* az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban az $a \in \mathbf{R}$ szám, ha minden konvergens $(x_n) \subset \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$ teljesül. Jele: $a = \lim_{x_0} f$ vagy $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Megjegyzés: Az $x_0$ pont maga nem kell, hogy az értelmezési tartományba essék.

A definíció lényeges része, hogy az $f(x_n)$ függvényérték-sorozat *az $x_n \to x_0$ sorozat megválasztásától függetlenül* $a$-hoz tartson.

A határérték fogalmát tekinthetjük úgy is, hogy a definícióban szereplő sorozatokat $x_0$-nak csak az egyik oldali környezetéből választjuk:

6-6. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *bal oldali* (*jobb oldali*) *határértéke* az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban az $a \in \mathbf{R}$ szám, ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$, $x_n < x_0$ (ill. $x_n > x_0$), $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$ is teljesül. Jele: $a = \lim_{x_0 - 0} f$ vagy $a = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (ill. $a = \lim_{x_0 + 0} f$ vagy $a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$).

Könnyen látható, hogy $f$-nek az $x_0$ pontban pontosan akkor létezik határértéke, ha ugyanott létezik bal- és jobb oldali határértéke is és ezek megegyeznek.

Ha $f$-nek $x_0$-ban van bal- és jobb oldali határértéke, de ezek nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek *ugrása* van $x_0$-ban.

A továbbiakban a határérték-fogalmat értelemszerűen kiterjesztjük a végtelenre is, pontosan úgy, ahogy azt a sorozatok esetén tettük:

**6-7. Definíció:** $(a)$ Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény határértéke az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban $(+\infty)$, ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to +\infty$.
$(b)$ Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény határértéke az $(+\infty)$-ben az $a \in \mathbf{R}$ szám (ill. $(+\infty)$), ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$, $x_n \to +\infty$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$ (ill. $f(x_n) \to +\infty$).

Hasonlóan definiáljuk a $(-\infty)$-ben vett határértéket, a $(-\infty)$-nel egyenlő határértéket. Szintén értelemszerűen történik a $(\pm\infty)$-nel egyenlő egyoldali határérték definiálása. Az összes lehetséges kombináció meggondolását nem részletezzük, azt az Olvasóra bízzuk.

**6-8. Definíció:** Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *folytonos az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pontban*, ha minden konvergens $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$, $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(x_0)$ is teljesül. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek *szakadása van az $x_0$ pontban*. A függvényt *folytonosnak* nevezzük, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

**6-3. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) :\equiv 1$ konstans függvény folytonos $\mathbf{R}$-en.

**6-4. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x$ folytonos $\mathbf{R}$-en. Határértéke $(+\infty)$-ben $(+\infty)$, $(-\infty)$-ben pedig $(-\infty)$.

**6-5. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2$ folytonos $\mathbf{R}$-en. Határértéke mind $(+\infty)$-ben mind pedig $(-\infty)$-ben $(+\infty)$.

**6-6. Példa:** Az $\operatorname{sgn} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \ x > 0 \\ 0, & \text{ha } \ x = 0 \\ -1, & \text{ha } \ x < 0 \end{cases}$$

*előjelfüggvény* folytonos $\mathbf{R}$-en, kivéve a 0 pontot. Itt nem folytonos, de van bal oldali határértéke $(-1)$ és jobb oldali határértéke is $(+1)$, tehát a 0-ban ugrása van.

**6-7. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

*Dirichlet-függvény* sehol sem folytonos és sehol sincs sem bal oldali sem jobb oldali határértéke.

**6-8. Példa:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ reciprokfüggvény 0-ban vett bal oldali határértéke $(-\infty)$, jobb oldali határértéke pedig $(+\infty)$. Az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Ez a függvény a 0-ban nincs értelmezve, így helytelen (bár elterjedt) azt mondani, hogy a 0-ban szakadása van. *A folytonosságot, ill. szakadást csak az értelmezési tartomány pontjaiban definiáltuk.*

A gyakorlati alkalmazások során különösen fontos szerepet játszanak a folytonos függvények. Szükséges tehát olyan tételeket kimondani és bizonyítani, melyekkel függvények folytonosságát igazolni lehet.

Az alábbi állítások egyenes következményei a sorozatokra vonatkozó megfelelő állításoknak. Azt fejezik ki, hogy folytonos függvényekből az algebrai műveletekkel képezett függvények mind folytonosak.

**6-2. Állítás:** Ha az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ és $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények folytonosak valamely $x\in\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g$ pontban, akkor
$(a)$ $f+g$ is folytonos $x$-ben,
$(b)$ $f-g$ is folytonos $x$-ben,
$(c)$ $f\cdot g$ is folytonos $x$-ben,
$(d)$ $\frac{f}{g}$ is folytonos $x$-ben, feltéve, hogy $g(x)\neq 0$.

A következő állítás szerint folytonos függvények kompozíciója szintén folytonos. Az állítás bizonyítása a folytonosság definíciója alapján egyszerűen elvégezhető, ezért elhagyjuk. Javasoljuk azonban, hogy az Olvasó gondolja végig!

**6-3. Állítás:** Ha az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény folytonos valamely $x\in\mathcal{D}_f$ pontban, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pedig folytonos az $f(x)\in\mathcal{D}_g$ pontban, akkor a $g\circ f$ összetett függvény folytonos az $x$ pontban.

**6-9. Példa:** Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x):=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

előírással értelmezett függvény a $0$ kivételével mindenütt folytonos, de a $0$-ban nem folytonos.

**Bizonyítás:**

A szinusz- és a reciprokfüggvény folytonossága miatt (ld. később) $f$ folytonos a $0$-tól különböző helyeken. A $0$-ban viszont nem folytonos, mert pl. az

$$x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$$

sorozatra $x_n\to 0$, de

$$f(x_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\equiv 1,$$

így $f(x_n)$ nem tart $f(0)$-hoz. $\square$

**6-10. Példa:** Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

előírással értelmezett függvény mindenütt (tehát a $0$-ban is) folytonos.

**Bizonyítás:**

A szinusz- és a reciprokfüggvény folytonossága miatt (ld. később) $f$ folytonos a $0$-tól különböző helyeken. Legyen most $x_n\to 0$ tetszőleges, akkor

$$|f(x_n)-f(0)| = |f(x_n)| \leq |x_n|\cdot\left|\sin\frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n| \to 0$$

azaz $f$ a $0$-ban is folytonos. $\square$

A 6-4. Példa és a 6-2. Állítás azonnali következménye, hogy *minden polinom folytonos függvény* $\mathbf{R}$-en. Látni kell azonban, hogy ezekből az állításokból *nem* következik pl. a gyökfüggvény, a szinuszfüggvény, exponenciális függvény stb. folytonossága sem. A következő két állítás a gyakorlatban nagyon jól használható elégséges feltételt ad a folytonosságra.

**6-4. Állítás:** Legyen $I$ egy intervallum és $f:I\to\mathbf{R}$ egy függvény. Ha van olyan $C\geq 0$ szám, hogy minden $x_1,x_2\in I$ esetén

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq C\cdot|x_1-x_2|$$

teljesül, akkor $f$ folytonos $I$ minden pontjában.

**Bizonyítás:**

Ekkor tetszőleges $(x_n) \subset I$, $x_n \to x \in I$ esetén:

$|f(x_n) - f(x)| \le C \cdot |x_n - x| \to 0$, azaz $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

Az állításban szereplő feltételt *Lipschitz-féle feltételnek*, a $C$ állandót pedig *Lipschitz-állandónak* (*Lispchitz-konstansnak*) nevezzük. A feltétel teljesülése szemléletesen azt jelenti, hogy egymáshoz „közeli" pontokat az $f$ függvény egymáshoz „közeli" pontokba visz, a képpontok távolsága legfeljebb egy fix számszorosa az argumentumok távolságának.

**6-9. Definíció:** Ha egy függvény kielégíti a Lipschitz-feltételt valamely 1-nél kisebb Lipschitz-konstanssal, akkor az illető függvényt *kontraktív (összehúzó) leképezésnek*, vagy röviden *kontrakciónak* nevezzük.

A Lipschitz-feltételhez hasonló, de ellenkező irányú becslés az inverz függvény létezésére és mindjárt annak folytonosságára is ad egy elegendő feltételt.

**6-5. Állítás:** Tegyük fel, hogy $I$ és $J$ intervallum, továbbá $f : I \to J$ egy, az $I$ intervallumot a $J$ intervallumra leképező függvény. Ha van olyan $c > 0$ szám, hogy minden $x_1, x_2 \in I$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ge c \cdot |x_1 - x_2|$$

teljesül, akkor $f$ invertálható $I$-n, továbbá az $f^{-1}$ inverz függvény folytonos a $J$ intevallum minden pontjában.

**Bizonyítás:**

Ha $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \ne x_2$, akkor a feltétel miatt $|f(x_1) - f(x_2)| \ge c \cdot |x_1 - x_2| > 0$, azaz $f(x_1) \ne f(x_2)$. Ezért $f$ kölcsönösen egyértelmű, így invertálható. Az $f^{-1}$ inverz függvény tehát létezik. Megmutatjuk, hogy az inverz függvény kielégíti a Lipschitz-feltételt, ebből az 6-4. Állítás alapján $f^{-1}$ folytonossága már következik.

Legyenek $y_1,y_2 \in J$ tetszőlegesek, akkor alkalmas $x_1,x_2 \in I$ számokra $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Innen a feltétel alapján:

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| = |x_1 - x_2| \geq \frac{1}{c}|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{c}|y_1 - y_2|,$$

tehát $f^{-1}$ valóban kielégíti a Lipschitz-feltételt $J$-n, mégpedig $1/c$ Lipschitz-állandóval. □

6-11. Példa: Az $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ leképezés folytonos a $\mathbf{R}_+$ intervallumon.

Bizonyítás:

Elég megmutatni, hogy a gyökfüggvény folytonos minden $[a,b] \subset \mathbf{R}_+$ intervallumon, ahol $0 < a < b$ tetszőleges pozitív számok. Ekkor minden $x_1,x_2 \in [a,b]$ esetén

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left|\frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|x_1 - x_2|,$$

tehát a gyökfüggvény $[a,b]$-n kielégíti a Lipschitz-feltételt az $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ Lipschitz-állandóva, így folytonos is $[a,b]$-n (ld. a 6-4. Állítást). □

Megjegyezzük, hogy a gyökfüggvény a 0-ban is folytonos, de ez a fentiekből nem következik. A 0-ban való folytonosság igazolását feladatként tűzzük ki.

6-12. Példa: Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$ függvény folytonos.

Bizonyítás:

Legyenek $x_1,x_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek. Az ismert trigonometrikus addíciós tételek alapján:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq |x_1-x_2|,$$

ahol felhasználtuk a nemnegatív $\alpha$ szögekre vonatkozó ismert $\sin\alpha \leq \alpha$ összefüggést. A szinuszfüggvény tehát kielégíti a Lipschitz-feltételt a $C = 1$ Lipschitz-állandóval, így folytonos is (ld. a 6-4. Állítást). □

Hasonlóan igazolható, hogy a koszinuszfüggvény is folytonos, innen pedig a tangens- és kotangensfüggvények folytonossága is következik.

**6-13. Példa:** Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^x$ exponenciális függvény folytonos $\mathbf{R}$-en.

**Bizonyítás:**

Először azt igazoljuk, hogy az $x \mapsto e^x$ leképezés folytonos a $[0,1]$ intervallumon. Legyenek $x_1,x_2 \in [0,1]$ tetszőleges számok, akkor

$$|e^{x_1} - e^{x_2}| = e^{x_2} \cdot \left|e^{x_1-x_2} - 1)\right| \leq 2e^{x_2}|x_1-x_2| \leq 2e \cdot |x_1-x_2|$$

Az exponenciális függvény tehát $[0,1]$-en kielégíti a Lipschitz-feltételt a $C = 2e$ Lipschitz-állandóval, így folytonos is (ld. a 6-4. Állítást). Hasonlóan látható, hogy az $x \mapsto e^x$ leképezés az összes $[n,n+1]$ intervallumon is folytonos (ahol $n$ tetszőleges egész), tehát valóban folytonos az egész számegyenesen. □

Az exponenciális függvény definíciójából azonnal következik, hogy az szigorúan monoton nő, így invertálható. Inverzét (természetes alapú) *logaritmusfüggvénynek* nevezzük, és azt a log vagy az ln szimbólumok valamelyikével jelöljük. Ennek értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok $(0,+\infty)$ halmaza.

**6-14. Példa:** Az $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log x$ logaritmusfüggvény folytonos a $(0, +\infty)$ intervallumon.

**Bizonyítás:**

Legyenek $x_1$,$x_2 \in (0, +\infty)$ tetszőlegesek, $x_1 \geq x_2$. Ekkor

$$|e^{x_1} - e^{x_2}| = e^{x_2} \cdot \left|e^{x_1 - x_2} - 1)\right| \geq e^{x_2}|x_1 - x_2| \geq |x_1 - x_2|$$

A 6-5. Állítás alapján tehát a logaritmusfüggvény folytonos. □

**6-15. Példa:** Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén az $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ gyökfüggvény folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon.

**Bizonyítás:**

A gyökfüggvény felírható

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \cdot \log x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

alakban, azaz három folytonos függvény kompozíciójakért, így maga is folytonos a $(0, +\infty)$ intervallumon. A 0 pontbeli folytonosság a definíció alapján igazolható. □

# 14. lecke

# Folytonos függvények. Egyenletek közelítő megoldása

## 6.3. Folytonos függvények tulajdonságai

Az alábbi tételek, bár nagyon szemléletesek, nem magától értetődőek. Ugyanakkor rávilágítanak a folytonosság jelentőségére is.

6-6. Tétel: (Weierstrass). Legyen $f$ folytonos a korlátos, zárt $[a,b]$ intervallumon. Akkor $f$-nek van maximuma és minimuma ebben az intervallumban.

Bizonyítás:

Csak a maximum létezését igazoljuk (a minimum létezése hasonlóan igazolható). Jelölje $\alpha := \sup\{f(x): \; x \in [a,b]\}$. Legyenek $x_n \in [a,b]$ olyan számok, hogy $f(x_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ilyen számok vannak, mert $\alpha$ az értékkészlet *legkisebb* felső korlátja, így $\alpha - \frac{1}{n}$ már nem felső korlát. A konstrukció miatt $(x_n) \subset [a,b]$ egy olyan korlátos sorozat, melyre $f(x_n) \to \alpha$. A Bolzano–Weierstrass-tétel miatt $(x_n)$-ből kiválasztható egy konvergens $(x_{n_k})$ részsorozat. Jelölje $x_0 := \lim x_{n_k}$. Akkor $(f(x_{n_k}))$ részsorozata $(f(x_n))$-nek, így szintén $\alpha$-hoz tart: $f(x_{n_k}) \to \alpha$. Innen $f$ folytonossága miatt $f(x_0) = \alpha$ adódik, tehát $\alpha$ nemcsak szuprémuma, de maximuma is az értékkészletnek, azaz $f$-nek maximuma van $x_0$-ban. $\square$

Megjegyzés: A tétel állítása *szemléletesen* nyilvánvaló. Azt fejezi ki, hogy korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény grafikonján van legmagasabban és legalacsonyabban fekvő pont. Valójában egyáltalán nem nyilvánvaló állításról van szó, amely a valós számok alapvető tulajdonságain múlik, csakúgy, mint a szuprémum létezésének tétele vagy a Bolzano–Weierstrass-tétel.

6-7. Tétel: (Bolzano). Legyen $f$ folytonos a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek. Akkor $f$-nek van (legalább egy) zérushelye ebben az intervallumban.

Bizonyítás:

Legyen pl. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ ($f(a) > 0$ és $f(b) < 0$ esetén a bizonyítás hasonló). Felezzük meg az $[a,b]$ intervallumot, és jelölje $[a_1,b_1]$ azt a felét, melyre $f(a_1) < 0$ és $f(b_1) > 0$ (ha a felezőpontban a függvényérték épp 0, akkor ott a függvénynek zérushelye van, így a bizonyítás kész). Most felezzük meg az $[a_1,b_1]$ intervallumot is, és jelölje $[a_2,b_2]$ azt a felét, melyre $f(a_2) < 0$ és $f(b_2) > 0$, és így tovább. Így kapunk egy egymásba ágyazott zárt intervallumsorozatot: $[a,b] \supset [a_1,b_1 \supset [a_2,b_2] \supset \ldots$ . A Cantor-axióma miatt ezen intervallumoknak van közös pontja, pl. $x$. Megmutatjuk, hogy $x$ zérushelye $f$-nek. Valóban, nyilván $a_n \to x$ és $b_n \to x$, továbbá $f$ folytonossága miatt $f(a_n) \to f(x)$ és $f(b_n) \to f(x)$. Másrészt minden $n$-re $f(a_n) < 0$ és $f(b_n) > 0$, innen a (közös) limeszre teljesül, hogy $f(x) \geq 0$ és ugyanakkor $f(x) \leq 0$, következésképp $f(x) = 0$. $\square$

Megjegyzés: A tétel állítása ismét nagyon szemléletes. Azt fejezi ki, hogy ha egy folytonos függvény grafikonja egy intervallum bal végpontján az 1. tengely alatt, a jobb végpontján pedig felette van, akkor a két végpont között legalább egyszer metszi az 1. tengelyt. Ez a tétel is a már többször említett, a valós számok „hézagmentességét” kifejező tételek közé sorolható.

6-8. Következmény: Legyen $f$ folytonos a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon. Akkor az $f$ függvény minden, az $f(a)$ és $f(b)$ számok közé eső értéket legalább egyszer felvesz $[a,b]$-n.

Bizonyítás:

Legyen $y$ tetszőleges érték az $f(a)$ és $f(b)$ számok között. Az állítás az előző tételből adódik, azt a konstanssal eltolt $f - y$ függvényre alkalmazva. $\square$

A 6-7. Tétel egyúttal egy, a gyakorlatban is jól használható numerikus módszert ad az

$$f(x) = 0$$

alakú egyenletek közelítő megoldására, ahol $f$ teljesíti a tétel feltételeit. Általában a fenti egyenlet pontos megoldására nincs remény. Egy megoldást viszont előállíthatunk egy konvergens sorozat limeszeként (a módszer ezért nem tekinthető „egzakt” megoldásnak), amelyet a következő rekurzív módon definiált algoritmus határoz meg. Tegyük fel, hogy ismertek a szóban forgó intervallum $a$, $b$ végpontjai, és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ teljesülnek, akkor:

- 1.lépés: Legyen $c := \frac{a+b}{2}$.
- 2.lépés: Ha $f(c) = 0$, akkor az eljárást befejeztük, az $f$ függvénynek a $c$ szám zérushelye. Ellenkező esetben, ha $f(a) < 0$ és $f(c) > 0$, akkor legyen $\alpha := a$ és $\beta := c$, egyébként pedig legyen $\alpha := c$ és $\beta := b$.
- 3.lépés: Frissítsük az $a$, $b$ értékeket: $a := \alpha$, $b := \beta$.
- 4.lépés: Ismételjük az eljárást az 1. lépéstől mindaddig, amíg az $|b - a|$ intervallumhossz egy előre adott hibahatár alá nem csökken.
- 5.lépés: A gyök közelítésére elfogadjuk akár a legutolsó $a$-, akár a legutolsó $b$-értéket (vagy akár azok számtani közepét).

Megjegyzés: A 6-7. Tétel elvileg is megalapozza pl. a négyzetgyök, köbgyök stb. *létezését*. Így pl. egy $A$ nemnegatív szám négyzetgyökének neveztük azt a nemnegatív számot, melynek négyzete épp $A$. Nem nyilvánvaló azonban, hogy ilyen szám valóban létezik is. Épp ezt biztosítja a 6-7. Tétel, ha az $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f(x) := x^2 - A$ függvényt egy $[0,C]$ intervallumon vizsgáljuk, ahol $C$ elég nagy, pontosabban, teljesül a $C^2 > A$ egyenlőtlenség.

Végül példát mutatunk az 6-7. Tétel egy algebrai jellegű alkalmazására.

6-16. Példa: Igazoljuk, hogy bármely valós együtthatós pontosan harmadfokú egyenletnek van (legalább egy) valós gyöke.

*Megoldás*. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^3 + bx^2 + cx + d$ ahol $b,c,d \in \mathbf{R}$. Azt kell igazolni, hogy $f$-nek van zérushelye. Könnyen látható, hogy $\lim_{+\infty} f = +\infty$ és $\lim_{-\infty} f = -\infty$ (vajon miért?). Ez azt jelenti, hogy elég nagy $A,B > 0$ számok mellett már $f(-A) < 0$, és $f(B) > 0$. Az állítás most már a 6-7. Tétel egyenes következménye, a tételt a $[-A,B]$ intervallumra alkalmazva.

## 6.4. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

A 6-7. Tétel kapcsán szó volt bizonyos

$$f(x) = 0$$

alakú egyenletek megoldásáról. Most tekintsük az

$$x = f(x)$$

alakú egyenleteket, ahol $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adott függvény. Nagyon sok gyakorlati probléma ilyen egyenletekre vezet, ill. ilyen alakúra hozható.

6-10. Definíció: Az $x = f(x)$ egyenlet megoldását az $f$ függvény *fixpontjának* nevezzük.

Egyáltalán nem biztos, hogy egy ilyen egyenletnek van megoldása. Ez még általában akkor sem igaz, ha $f$ folytonos. A következő tétel egy jól használható elegendő feltételt ad a megoldás létezésére, a megoldás közelítő előállítása pedig egy egyszerű, általában könnyen megvalósítható algoritmussal történik.

6-9. Tétel: (Banach-féle fixponttétel). Legyen $I$ egy zárt intervallum, és legyen $f : I \to I$ kontrakció (azaz $f$ kielégíti a Lipschitz feltételt $I$-n, mégpedig 1-nél kisebb Lipschitz-állandóval). Akkor $f$-nek az $I$ intervallumban pontosan egy $x^*$ fixpontja van, és ez előáll az alábbi konvergens, rekurzív sorozat limeszeként:

$$x_0 \in I, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \qquad (n = 0,1,2,...)$$

a sorozat $x_0$ kezdő tagjának megválasztásától függetlenül.

Bizonyítás:

Jelölje $0 \leq q < 1$ az $f$ függvény Lipschitz-állandóját. Ekkor tehát minden $x,y \in I$-re $|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$ teljesül. Tekintsük az $x_{n+1} := f(x_n)$ rekurzív módon definiált sorozatot. *Először megmutatjuk, hogy* $(x_n)$ *Cauchy-sorozat, ezért konvergens* $I$*-ben.*

A Lipshchitz-feltételt sorozatosan alkalmazva az egyre kisebb indexekre, becsüljük meg két egymást követő tag eltérését:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|| \le q \cdot |x_n - x_{n-1}| = q \cdot |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \le$$
$$\le q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \ldots \le q^n|x_1 - x_0|.$$

Ezt felhasználva, tetszőleges $m \ge n$, $m = n + k$ alakú indexre:

$$|x_m - x_n| = |x_{n+k} - x_n| =$$

$$= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + x_{n+k-2} - \ldots + x_{n+1} - x_n| \le$$
$$\le |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \le$$
$$\le (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + q^{n+k-2} + \ldots + q^n) \cdot |x_1 - x_0| \le$$
$$\le q^n \cdot (1 + q + q^2 + q^3 \ldots) \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

ahol felhasználtuk a végtelen mértani sor összegképletét (a sor konvergens, mert $0 \le q < 1$). A jobb oldal $n \to +\infty$ esetén 0-hoz tart, azaz minden $\varepsilon$ számhoz van oly $N$ küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $\frac{1}{1-q} \cdot q^n|x_1 - x_0| < \varepsilon$. Következésképp minden $m \ge n \ge N$ indexre $|x_m - x_n| < \varepsilon$, tehát $(x_n)$ valóban Cauchy-sorozat.

Ezért $(x_n)$ konvergens $I$-ben, jelölje $x^* := \lim x_n$. Megmutatjuk, hogy ez fixpontja $f$-nek. A rekurzív definíció szerint $x_{n+1} = f(x_n)$. A bal oldal nyilván $x^*$-hoz tart. A jobb oldal $f$ folytonossága miatt $f(x^*)$-hoz konvergál. Innen $x^* = f(x^*)$, tehát $x^*$ valóban fixpont.

Végül igazoljuk, hogy csak egy fixpont van. Ha $x^*$ és $x^{**}$ két különböző fixpont, akkor

$$0 < |x^* - x^{**}| = |f(x^*) - f(x^{**}| \le q \cdot |x^* - x^{**}|,$$

ami lehetetlen, mert $q < 1$. Ezzel a tételt teljes egészében bebizonyítottuk. $\square$

Megjegyzés: A tétel feltételeiben lényeges, hogy $f$ az $I$ intervallumot önmagába képezi.

A rekurzív módon definiált $x_0 \in I$, $x_{n+1} := f(x_n)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ sorozatot sokszor *fixpont-iterációs* sorozatnak is nevezzük.

6-17. Példa: Oldjuk meg közelítően az $x = \frac{1}{2}\cos x$ egyenletet!

*Megoldás*. Az $x \mapsto \frac{1}{2}\cos x$ leképezés a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumot önmagába képezi, és itt kontrakció, mert a trigonometrikus addíciós tételek alapján

$$\left|\frac{1}{2}\cos x_1 - \frac{1}{2}\cos x_2\right| = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x_1-x_2|,$$

ahol felhasználtuk a nemnegatív $\alpha$ szögekre igaz $\sin\alpha \leq \alpha$ egyenlőtlenséget is.

Az egyenlet tehát fixpont-iterációval megoldható. Legyen

$$x_0 := 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\cos x_n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

A sorozat első néhány tagja (4 tizedesjegy pontossággal): 0,0000; 0,5000; 0,4387; 0,4526; 0,4496; 0,4502; 0,4501; 0,4501; 0,4501; ...

A fixpont 4 tizedesjegy pontossággal: 0,4501 .

# 15. lecke

## Nevezetes határértékek és néhány elemi függvény

## 6.5. Néhány nevezetes határérték

**6-18. Példa:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

*Megoldás*. A pozitív $x$-ekre érvényes $\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$ ismert egyenlőtlenség alapján

$$\frac{\sin x}{x}\le 1\le \frac{\sin x}{x\cdot\cos x}$$

Ezt átrendezve $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$, ami már *negatív x-ekre* is igaz. Ezért tetszőleges $x_n \to 0$ zérussorozat esetén adódik, hogy

$$\cos x_n \le \frac{\sin x_n}{x_n}\le 1 \qquad (n\in \mathbf{N}).$$

A bal oldal 1-hez tart (a koszinuszfüggvény folytonossága miatt). A jobb oldal pedig azonosan 1. Ezért a középső sorozat is konvergens és 1-hez tart.

**6-19. Példa:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

*Megoldás*.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}\to\frac{1}{2},$$

ha $x\to 0$, ahol felhasználtuk az előző példa eredményét.

6-20. Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

*Megoldás*:

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{-1+1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots}{x}=\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots.$$

Innen tetszőleges $|x|<1$ esetén

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|=\left|\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots\right|\le |x|\cdot\left(\frac{1}{2!}+\frac{|x|}{3!}+\frac{|x|^2}{4!}+\dots\right)\le |x|\cdot e.$$

Ezért, ha $x_n\to 0$, akkor

$$\left|\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-1\right|\le e\cdot|x_n|\to 0,$$

azaz $\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\to 1$.

6-21. Példa: $(a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$(b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}=-1$$

*Megoldás*. $(a)$ Jelölje $x:=\log(y+1)$, akkor

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{\log(y+1)}-1}{\log(y+1)}=\frac{y+1-1}{\log(y+1)}=\frac{y}{\log(y+1)}.$$

Ha most $y_n \to 0$ tetszőleges, akkor a logaritmusfüggvény folytonossága miatt az $x_n := \log(y_n + 1)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat is zérussorozat. Innen pedig, felhasználva az előző példa eredményét:

$$\frac{y_n}{\log(y_n + 1)} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1.$$

A $(b)$ eset az $(a)$-ra visszavezethető, $x$ helyébe annak ellentettjét írva.

**6-22. Példa:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

*Megoldás*.

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \to \frac{1}{2},$$

ha $x \to 0$.

## 6.6. Elemi függvények

Ebben a részben összefoglaljuk a korábbiakban megismert egyszerű függvénytípusokat, és néhány új függvényt is bevezetünk.

*Hatványfüggvények*:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := x^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

14. ábra. Az $x \mapsto x^2$ és az $x \mapsto x^3$ függvény grafikonja

A függvény páros, ha $n$ páros és páratlan, ha $n$ páratlan.

Ha a kitevő nemnegatív, de nem egész, akkor a megfelelő függvényt csak az $\mathbf{R}_+$ halmazon értelmezzük.

15. ábra. Az $x \mapsto x^{1/2}$ és az $x \mapsto x^{1/3}$ függvény grafikonja

Ha a kitevő negatív egész, akkor a függvény az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezhető.

*Trigonometrikus függvények*

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \operatorname{tg} x, \quad x \mapsto \operatorname{ctg} x$$

A szinusz- és a koszinuszfüggvény az egész $\mathbf{R}$ halmazon értelmezett és $2\pi$-periodikus. A tangensfüggvény $\pi$-periodikus, értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2}) \cdot \pi : \ k \in \mathbf{Z}\}$ halmaz. A kotangensfüggvény szintén $\pi$-periodikus, értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbf{Z}\}$ halmaz.

*Trigonometrikus függvények inverzei*

A szinuszfüggvény $\mathbf{R}$-en nem kölcsönösen egyértelmű, de a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra leszűkítve már igen, ezért itt invertálható. Az inverz függvényt az arcsin szimbólummal jelöljük. Ennek értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum, értékkészlete a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum.

Hasonlóan, a koszinuszfüggvény a $[0,\pi]$ intervallumra leszűkítve kölcsönösen egyértelmű, ezért itt invertálható. Az inverz függvényt az arccos szimbólummal jelöljük. Értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum, értékkészlete a $[0,\pi]$ intervallum.

16. ábra. Az $x \mapsto x^{-1}$ és az $x \mapsto x^{-2}$ függvény grafikonja

17. ábra. Az $x \mapsto sinx$, $x \mapsto cosx$ és az $x \mapsto \mathrm{tg}\ x$ függvény grafikonja

A tangensfüggvény ugyancsak kölcsönösen egyértelmű a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra leszűkítve. A leszűkített függvény inverzét az arctg szimbólummal jelöljük. Értelmezési tartománya a teljes $\mathbf{R}$ halmaz, értékkészlete a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum.

18. ábra. Az $x \mapsto \arcsin x$ és az $x \mapsto \arccos x$ függvények grafikonjai

*Az exponenciális- és a logaritmusfüggvény*

Az $e$ alapú exponenciális-, ill. logaritmusfüggvényt az

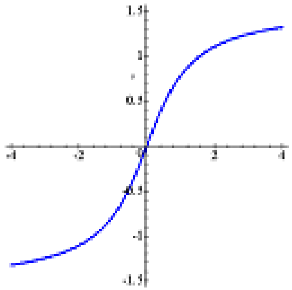
$$x \mapsto e^x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$x \mapsto \log x \qquad (x \in \mathbf{R}_+)$$

hozzárendelések definiálják. Ezek segítségével értelmezzük a tetszőleges alapú exponenciális- és logaritmusfüggvényt az alábbi módon. Tegyük fel, hogy $a > 0$, $a \neq 1$ adott valós szám, és legyen

$$a^x := e^{x \cdot \log x}, \text{ továbbá } \log_a x := \frac{\log x}{\log a} \qquad (x > 0).$$

Igazolható, hogy ez az *egyetlen* lehetséges definíció, ha azt akarjuk, hogy a hatványozás ismert azonosságai mind érvényben maradjanak.



19. ábra. Az $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ függvény grafikonja

20. ábra. Az $x \to e^x$ és az $x \to \log x$ függvények grafikonjai

*Hiperbolikus függvények*

Az exponenciális függvények segítségével több új, a gyakorlat számára is fontos függvényt definiálunk. Az alábbi függvényeket *hiperbolikus függvényeknek* nevezzük. Ezek meglepő hasonlóságokat mutatnak a trigonometrikus függvényekkel (jóllehet, a grafikonjaik nagyon különbözőek).

6-11. Definíció: Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ mellett jelölje

$$\mathrm{sh}\ x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(hiperbolikus szinusz)},$$

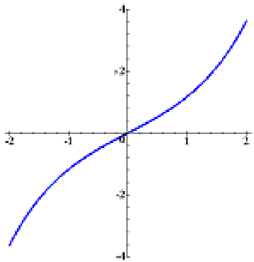
$$\mathrm{ch}\ x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(hiperbolikus koszinusz)},$$

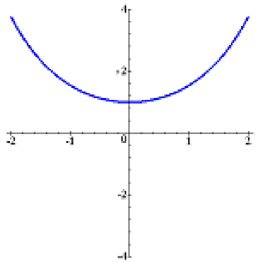
$$\mathrm{th}\ x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(hiperbolikus tangens)}.$$

Az elnevezést az indokolja, hogy e függvényekre a trigonometrikus függvényekéhez igen hasonló azonosságok teljesülnek. A következő állításban összefoglaljuk a legfontosabbakat. Ezek mind közvetlen számolással igazolhatók, az ellenőrzés részleteit az Olvasóra bízzuk.

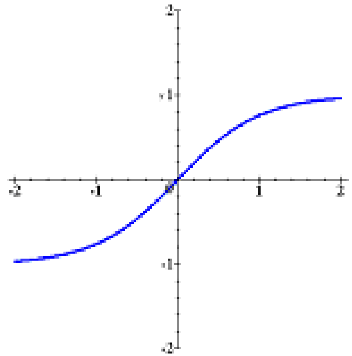
6-10. Állítás: Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén

- $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$,
- $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\ x \cdot \mathrm{ch}\ y + \mathrm{ch}\ x \cdot \mathrm{sh}\ y$,
- $\mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}\ x \cdot \mathrm{ch}\ y - \mathrm{ch}\ x \cdot \mathrm{sh}\ y$,
- $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}\ x \cdot \mathrm{ch}\ y + \mathrm{sh}\ x \cdot \mathrm{sh}\ y$,
- $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}\ x \cdot \mathrm{ch}\ y - \mathrm{sh}\ x \cdot \mathrm{sh}\ y$.





21. ábra. Az $x \to \operatorname{sh} x$ és az $x \to \operatorname{ch} x$ függvények grafikonjai



22. ábra. Az $x \to \operatorname{th} x$ függvény grafikonja

A hiperbolikus koszinuszfüggvény grafikonját szokták még *láncgörbének* is nevezni. Az elnevezést az indokolja, hogy egy, a végein rögzített, saját súlya alatt belógó lánc jó közelítéssel ilyen függvénnyel leírható alakot vesz fel.

# 16. lecke

## Ellenőrző kérdések és feladatok

## 6.7. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$ határérték

☐ nem létezik ☐ $0$ ☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ $-\dfrac{4}{9}$

**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ határérték

☐ $1$ ☐ $-1$ ☐ $0$ ☐ nem létezik

**3.** Az $x \to x\cdot e^x - 1$ függvénynek a $[0,1]$ intervallumon biztosan van

☐ zérushelye
☐ lokális minimuma
☐ lokális maximuma
☐ szakadása

**4.** Az $x \to x^2 \sin x$ függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumon biztosan van

☐ zérushelye
☐ lokális minimuma
☐ lokális maximuma
☐ szakadása

**5.** Az alábbi, $\mathbf{R}$-en értelmezett függvények közül az egyik nem kölcsönösen egyértelmű. Melyik?

☐ $f(x) := x^4$ ☐ $f(x) := -x^3$ ☐ $f(x) := e^{-3x}$ ☐ $f(x) := \operatorname{arctg} x$

**6.** Az alábbi, $\mathbf{R}$-en értelmezett függvények közül az egyiknek a $(+\infty)$-ben vett határértéke $0$. Melyiknek?

☐ $f(x) := e^{\frac{1}{x^2+1}}$ ☐ $f(x) := \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ ☐ $f(x) := e^{-2x}$ ☐ $f(x) := \operatorname{arctg} x$

**7.** Az alábbi, $\mathbf{R}$-en értelmezett függvények közül az egyiknek a $(+\infty)$-ben vett határértéke $(+\infty)$. Melyiknek?

☐ $f(x) := \operatorname{arctg} x$ ☐ $f(x) := e^{-x^2}$ ☐ $f(x) := \dfrac{1}{e^x + 1}$ ☐ $f(x) := \operatorname{sh} x$

**8.** A következő képletekkel adott, $\mathbf{R}$-en értelmezett függvények közül csak az egyik kölcsönösen egyértelmű (azaz invertálható). Melyik?

☐ $f(x) := x^2 - x$ ☐ $f(x) := e^{-3x}$ ☐ $f(x) := \operatorname{ch} x$ ☐ $f(x) := \cos x$

**9.** Az $x \to 1 - \dfrac{x^2}{4}$ függvénynek a $(0,1)$ intervallumon biztosan van

☐ zérushelye
☐ lokális minimuma
☐ lokális maximuma
☐ fixpontja

**10.** Az $x \to f(x) := \log \dfrac{1}{2x}$ leképezés inverze az alábbi formulával adható meg:

☐ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$ ☐ $f^{-1}(x) = 2e^{-x}$ ☐ $f^{-1}(x) = e^{-2x}$ ☐ $f^{-1}(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$

End Quiz

Score:

## 6.8. Feladatok

**6-1. Feladat:** Igazoljuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

formulával értelmezett függvény mindenütt folytonos ($\alpha > 0$ adott paraméter).

Megoldás: itt

**6-2. Feladat:** Igazoljuk, hogy az $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ leképezés a 0 pontban jobbról folytonos.

Megoldás: itt

**6-3. Feladat:** Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Megoldás: itt

**6-4. Feladat:** Mutassuk meg, hogy minden $x,y \in [0,\frac{\pi}{2}]$ esetén

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin \frac{x+y}{2}.$$

Megoldás: itt

**6-5. Feladat:** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{2}{3-x}$ formulával értelmezett függvénynek két fixpontja is van, az 1 és a 2 számok. Nem mond-e ez ellent a Banach-fixponttételnek? Mihez konvergál a fixpont-iterációs sorozat?

Megoldás: itt

**6-6. Feladat:** Van-e pozitív megoldása az $\frac{1}{4}e^{-x} - x + 1 = 0$ egyenletnek? Ha igen, számítsuk ki legalább 3 tizedesjegy pontossággal!

Megoldás: itt

**6-7. Feladat:** Számítsuk ki a az alábbi határértékeket (ha léteznek):

(a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6},$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 7x + 9}{3x^2 + 5},$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1},$$

Megoldás: itt

6-8. Feladat: Számítsuk ki a az alábbi határértékeket (ha léteznek):

(a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6},$$

(b)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}},$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x},$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2},$$

(e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x},$$

(f)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x},$$

(g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3(x-8)}{\sin 2x - 2\sin x},$$

Megoldás: itt

6-9. Feladat: Számítsuk ki a az alábbi határértékeket (ha léteznek):

(*a*)

$$\lim_{x\to+0}(1+xy)^{1/x} \qquad (y>0 \text{ rögzített szám}),$$

(*b*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 x},$$

(*c*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}}+\log\sqrt{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}}}{x^2}.$$

Megoldás: itt

6-10. Feladat: Tekintsük az $f(x) := 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)+2$ képlettel értelmezett függvényt. Szűkítsük le a függvényt minél tágabb halmazra úgy, hogy a leszűkítés kölcsönösen egyértelmű legyen. Határozzuk meg ezen leszűkített függvény inverzét. Adjuk meg az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét is.

Megoldás: itt

6-11. Feladat: Határozzuk meg az $f(x) := \dfrac{2x^3-4x}{5x^3+9}$ képlettel definiált függvény határértékét a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben.

Megoldás: itt

**6-12. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-1}$ képlettel definiált függvény határértékét a $(+\infty)$-ben.

**Megoldás:** itt

---

**6-13. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$ képlettel definiált függvény $x_0 = 1$ helyen vett bal és jobb oldali határértékét.

**Megoldás:** itt

---

**6-14. Feladat:** Folytonos-e az alábbi képlettel megadott függvény? $f(x:) = \begin{cases} x^2+3, & \text{ha} \quad x \geq 1 \\ 4^x, & \text{ha} \quad x < 1 \end{cases}$

**Megoldás:** itt

---

**6-15. Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x}}$ határérétéket, ha létezik.

**Megoldás:** itt

---

**6-16. Feladat:** Oldjuk meg (közelítően) a $-2x = \log(6x)$ egyenletet a valós számok körében.

**Megoldás:** itt

---

**6-17. Feladat:** Igazoljuk, hogy minden $x,y \in \mathbf{R}$ esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$$

**Megoldás:** itt

6-1 **Megoldás:**

$x \neq 0$ esetén $f$ nyilván folytonos $x$-ben, mert folytonos függvényekből állítható össze (az alapműveletek és a kompozíció segítségével). Elég tehát csak a $0$-beli folytonosságot igazolni. Legyen $x_n \to 0$ tetszőleges sorozat, akkor

$$|f(x_n)| \leq |x_n|^\alpha \to 0,$$

azaz

$$f(x_n) \to 0,$$

tehát a függvény valóban folytonos $0$-ban is.

6-2 **Megoldás:**

$$\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}\log x}$$

minden $x > 0$ esetén. Legyen $x_n > 0$, $x_n \to 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\log x_n \to -\infty,$$

ezért

$$\sqrt{x_n} = e^{\frac{1}{2}\log x_n} \to 0,$$

tehát a gyökfüggvény valóban folytonos a $0$-ban is.

6-3 **Megoldás:**

Jelölje $y := \operatorname{arctg} x$, akkor $x = \operatorname{tg} y$. Innen:

$$x^2 = \operatorname{tg}^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y}.$$

Kifejezve $\cos^2 y$-t:

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

adódik, ezért

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6-4 **Megoldás:**

Feltehető, hogy $x \leq y$. Mivel a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a szinuszfüggvény monoton nő, a koszinuszfüggvény pedig monoton fogy, azért

$$\sin\frac{x}{2} \leq \sin\frac{y}{2} \qquad \text{és} \qquad \cos\frac{x}{2} \geq \cos\frac{y}{2}.$$

Innen:

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right) \leq \left(\sin\frac{y}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right),$$

azaz

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} \leq \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Az addíciós tételek alkalmazásával innen

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2y}{2} \leq \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right),$$

amiből az állítás már következik.

**6-5 Megoldás:**

A függvény a $[0,\frac{3}{2}]$ zárt intervallumot önmagába képezi (mert itt $f$ monoton nő, és $f(0)=\frac{2}{3}$, $f(\frac{3}{2})=\frac{4}{3}$). Ebben az intervallumban $f$ kontrakció. Valóban, tetszőleges $x,y\in[0,\frac{3}{2}]$ számok esetén:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{2}{3-x}-\frac{2}{3-y}\right|=2\cdot\frac{|3-y-3+x|}{(3-x)(3-y)}=\frac{2}{(3-x)(3-y)}\cdot|x-y|$$

A jobb oldalon $x$, $y$ helyébe a maximális értékeiket (3/2) beírva a nevező csak csökkenhet. Innen

$$|f(x)-f(y)|\leq\frac{8}{9}\cdot|x-y|,$$

tehát $f$ kielégíti a Lipschitz-feltételt $\frac{8}{9}$ értékű Lipschitz-konstanssal, azaz $f$ kontrakció a $[0,\frac{3}{2}]$ zárt intervallumban, ezért itt pontosan egy fixpontja van (az 1 szám), és bármely $x_0\in[0,\frac{3}{2}]$ kezdőérték esetén az

$$x_{n+1}:=\frac{2}{3-x_n}\qquad(n\in\mathbf{N})$$

iterációs sorozatra $x_n\to 1$ teljesül.

A másik fixpont (a 2 szám) környezetében $f$ *nem kontrakció* (mutassuk meg!). Ennek létezése tehát nem mond ellent a Banach-fixponttételnek.

6-6 **Megoldás:**

Ha

$$f(x) := \frac{1}{4}e^{-x} + 1,$$

akkor az egyenlet ekvivalens az

$$x = f(x)$$

egyenlettel. Az $f$ függvény monoton fogyó, és az $[1{,}2]$ zárt intervallumot önmagába képezi (valóban, $f(1) = \frac{1}{4e} + 1 \in [1{,}2]$, és $f(2) = \frac{1}{4e^2} + 1 \in [1{,}2]$). Megmutatjuk, hogy $f$ itt kontrakció. Legyenek $x{,}y \in [1{,}2]$ tetszőlegesek, feltehető, hogy $x$ a nagyobb. Akkor

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{4}|e^{-x} - e^{-y}| = \frac{e^{-x}}{4}|1 - e^{x-y}| \le \frac{e^{-x}}{4}|x - y| \le \frac{1}{4}|x - y|$$

tehát $f$ valóban kontrakció. Így az egyenletnek 1 és 2 közt pontosan egy gyöke van, és ez fixpont-iterációval meghatározható, pl.

$$x_1 := 0, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{4}e^{-x_n} + 1.$$

Négy iterációs lépés után a közelítő megoldás $1{,}0845$, és az első 3 tizedesjegy a további iterációk során már nem változik.

6-7 **Megoldás:**

$(a)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-3}=0.$$

$(b)$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-7x+9}{3x^2+5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\frac{1}{3}.$$

$(c)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

**6-8 Megoldás:**

($a$)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{11x+3-4x-17}{(x-3)(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{7(x-2)}{(x-3)(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}=-\frac{7}{10}.$$

($b$) Bevezetve az $y:=\pi-x$ helyettesítést (ekkor $x\to\pi$ esetén $y\to 0$):

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi-y)}{1-\frac{(\pi-y)^2}{\pi^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1-\frac{\pi^2-2\pi y+y^2}{\pi^2}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\pi^2\sin y}{2\pi y-y^2}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\pi^2}{2\pi-y}\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Itt felhasználtuk a 6-18. Példa eredményét.

($c$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sh } x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}=1,$$

ahol felhasználtuk a 6-20. Példa eredményét.

($d$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch } x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch } x-1}{x^2}\cdot\frac{\text{ch } x+1}{\text{ch } x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch}^2 x-1}{x^2(\text{ch } x+1)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^2(\operatorname{ch} x + 1)} = \frac{1}{2},$$

ahol felhasználtuk az előző feladat eredményét.

(*e*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{\cos 4x} \cdot \frac{\sin 4x}{\sin 5x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{\cos 4x} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{4}{5},$$

ahol felhasználtuk a 6-18. Példa eredményét.

(*f*) Bevezetve az $y := \operatorname{tg} x$ helyettesítést (ekkor $x \to \frac{\pi}{4}$ esetén $y \to 1$):

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} = \lim_{y\to 1} \frac{\log y}{1 - \frac{1}{y}} = \lim_{y\to 1} \left( y \cdot \frac{\log(1 + (y-1))}{y - 1} \right).$$

Most vezessük be a $z := y - 1$ helyettesítést (ekkor $z \to 0$), innen végül:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} = \lim_{z\to 0} \left( (z+1) \cdot \frac{\log(1+z)}{z} \right) = 1,$$

ahol felhasználtuk a 6-21. Példa eredményét.

(*g*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3(x-8)}{\sin 2x - 2\sin x} = \lim_{x\to 0} \left( \frac{x^3}{2\sin x \cos x - 2\sin x} \cdot (x-8) \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x^2}{\cos x - 1} \cdot (x-8) \right) = 8,$$

ahol felhasználtuk a 6-18. és a 6-19. Példák eredményeit.

**6-9 Megoldás:**

$(a)$ Bevezetve a $w := \frac{1}{xy}$ helyettesítést (ekkor $x \to +0$ esetén $w \to +\infty$, mert $y$ pozitív!)

$$\lim_{x\to+0}(1+xy)^{1/x} = \lim_{w\to+\infty}(1+\frac{1}{w})^{wy} = e^y.$$

$(b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-1+x^2}{(\sin^2 x)\cdot(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Itt felhasználtuk a 6-18. Példa eredményét.

$(c)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}}+\log\sqrt{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x^2} =$$

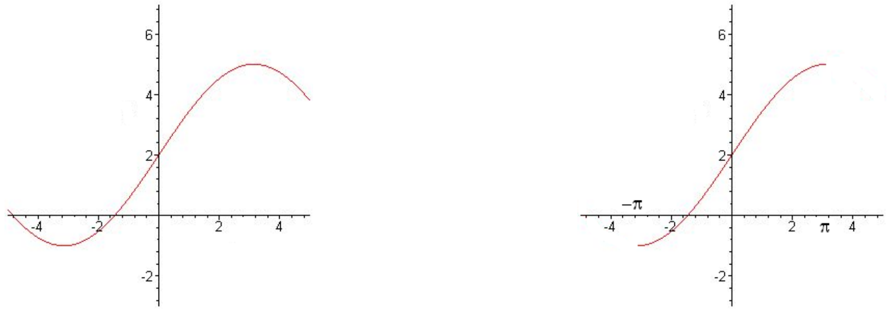
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(1-x^2)-\log(1+x^2)}{x^2} = -1.$$

Itt felhasználtuk a 6-21. Példa eredményét.

6-10 **Megoldás:**

A $\sin$ függvény grafikonjából kaphatjuk meg $f$ grafikonját lineáris transzformációkkal. Mivel a $\sin$ mögött nem $x$ áll, hanem $\frac{x}{2}$, ezért $x$ tengellyel párhuzamosan kétszeresre kell nyújtani a függvény grafikonját. A $3$-as szorzó a $\sin$ előtt azt jelenti, hogy $y$ tengellyel párhuzamosan háromszorosra kell nyújtani a grafikont. Végül a $+2$ miatt $y$ tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban, 2-vel el kell tolni a grafikont.

Jól látható, hogy a minden valós számra értelmezett függvény nem kölcsönösen egyértelmű, ezért nem invertálható. Ha azonban a $[-\pi,\pi]$ intervallumra leszűkítjük a függvényt, akkor egy szigorúan monoton növekvő függvényt kapunk. Ez kölcsönösen egyértelmű, így már invertálható. Ennél szélesebb intervallumon azonban már nem kölcsönösen egyértelmű a függvény.




23. ábra. $f(x) := 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ és annak leszűkítése

Egy megfelelő leszűkítés így a következő: $g(x) := 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2, \quad$ és $\mathcal{D}_g := [-\pi,\pi]$.

Ezen $g$ függvénynek határozzuk meg az inverzét. Ehhez írjunk a $g(x)$ helyére a hozzárendelési utasításban $y$-t:

$$y = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

Ezután fejezzük ki $x$-et az egyenletből. A rendezés első két lépése egyszerű. Vonjunk ki mindkét oldalból 2-t, majd osszunk 3-mal. Így a következőt kapjuk:

$\dfrac{y-2}{3} = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Mivel az $x$ a $\sin$ függvény argumentumában szerepel, ezért mindkét oldalnak vesszük az arcsin-át:

$\arcsin\dfrac{y-2}{3} = \arcsin\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

A jobb oldalon arcsin és sin áll egymás után egy összetett függvényben, melyek egymás inverzei: egy ilyen összetett függvény értéke egyszerűen az argumentummal, jelen esetben $\frac{x}{2}$-vel egyenlő:

$\arcsin\dfrac{y-2}{3} = \dfrac{x}{2}$, ahonnan: $2\arcsin\dfrac{y-2}{3} = x$ .

A $g$ függvény inverze tehát a következő:

$$g^{-1}(y) = 2\arcsin\frac{y-2}{3}$$

(Ne feledjük, hogy most $y$ jelöli az inverz függvény argumentumát.) Határozzuk meg ezen függvény legbővebb értelmezési tartományát.

Az arcsin miatti kikötés: $-1 \leq \dfrac{y-2}{3} \leq 1$, ahonnan: $-1 \leq y \leq 5$. A $g^{-1}$ függvény értelmezési tartománya tehát a következő:

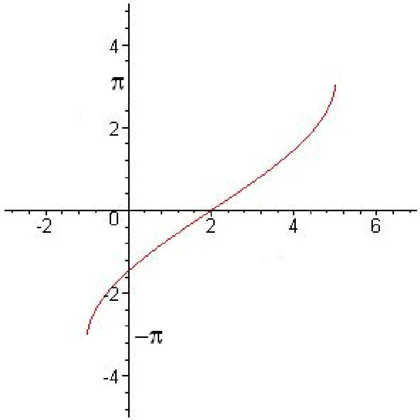
$$\mathcal{D}_{g^{-1}} = [-1{,}5]$$

Az ábráról is leolvasható, hogy ez az eredeti függvény értékkészlete.

Mivel az invertálás során felcserélődik az értelmezési tartomány és az értékkészlet, így $g^{-1}$ értékkészlete megegyezik a $g$ értelmezési tartományával. Ennek következtében

$$\mathcal{R}_{g^{-1}} = [-\pi,\pi]$$

Ha ábrázoljuk a $g^{-1}(y) := 2\arcsin\dfrac{y-2}{3}$ inverz függvényt, akkor mindez a grafikonról is leolvasható.




24. ábra. A $g^{-1}(y) := 2\arcsin\dfrac{y-2}{3}$ inverz függvény

Ezen függvény grafikonját, az arcsin függvény grafikonjából kaphatjuk meg lineris transzformációkkal.

6-11 **Megoldás:**

Vizsgáljuk először $(+\infty)$-ben a határértéket. Nyilvánvaló, hogy a számláló is és a nevező is végtelenhez tart. Rövid (bár pongyola) szóhasználattal, „$\frac{\infty}{\infty}$ típusú” a kiszámítandó határérték. A megoldás alapötlete ugyanaz, mint a sorozatok esetében: egyszerűsítjük a törtet a nevező leggyorsabban növekedő tartó részével. Ez jelen esetben az $x^3$. Innen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x}{5x^3+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x^2}}{5+\frac{9}{x^3}}$$

A $\frac{4}{x^2}$ és a $\frac{9}{x^3}$ mindegyike $0$-hoz tart, ennek következtében az eredeti határérték:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x^2}}{5+\frac{9}{x^3}}=\frac{2-0}{5+0}=\frac{2}{5}$$

Kérdés ezután, hogy mennyit változik a helyzet, ha a mínusz végtelenben vizsgáljuk a határértéket. Ekkor a számláló és a nevező nyilván mínusz végtelenhez tartanak, hiszen a $x$ negatív, akkor $x^3$ is negatív. Röviden, a határérték most „$\frac{-\infty}{-\infty}$ típusú”. Ez azonban a megoldás további lépésit nem befolyásolja. Ugyanazt az egyszerűsítést hajthatjuk végre, mint az előbb, s utána ugyanazok a részek fognak $0$-hoz tartani. Ennek következtében ugyanazt a határértéket kapjuk a mínusz végtelenben is.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-4x}{5x^3+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{4}{x^2}}{5+\frac{9}{x^3}}=\frac{2-0}{5+0}=\frac{2}{5}$$

Ennek a függvénynek tehát a plusz végtelenben és a mínusz végtelenben ugyanaz a szám a határértéke.

6-12 **Megoldás:**

A határérték – röviden, de nem teljesen pontosan – „$\infty - \infty$ típusú”. Kíséreljük meg gyöktelenítéssel megoldani a feladatot, azaz bővítsünk ugyanennek a két gyökös tagnak az összegével:

$$(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}) = \frac{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}} =$$

$$= \frac{(2x+3)-(2x-1)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}} = \frac{4}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}$$

A számlálóban már csak egy konstans áll, míg a nevező a végtelenhez tart. Ennek következtében:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}) = \frac{4}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}} = 0$$

Megjegyzés: Ennek a függvénynek a határértékéről nincs értelme beszélni a mínusz végtelenben, hiszen a függvény az $1/2$-nél kisebb argumentumokra nincs is értelmezve.

6-13 **Megoldás:**

Az $x_0 = 1$ helyen nem értelmezett a függvény, mert ott a nevező zérus. A nevezőnek itt a határértéke (mindkét oldali) is zérus: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1) = 1^2 - 1 = 0$. Így a határérték egyszerű behelyettesítéssel és a folytonosságra hivatkozással nem kapható meg.

A számláló határértéke a helyettesítési érték (a számláló folytonossága miatt):

$$\lim_{x\to 1}(x^2+4x+3) = 1^2 + 4\cdot 1 + 3 = 8$$

Ha most $x$ *balról tart* $1$-*hez* (azaz $x < 1$), akkor $x^2 - 1 < 0$, tehát a nevező negatív. Ekkor a határérték $-\infty$ lesz:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+4x+3}{x^2-1} = -\infty$$

Ha pedig $x$ *jobbról tart* $1$-*hez* (azaz $x > 1$), akkor $x^2 - 1 > 0$, tehát a nevező pozitív. Ekkor a határérték $+\infty$ lesz:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+4x+3}{x^2-1} = +\infty$$

Ez a függvény az $x_0 = 1$ helyen tehát balról és jobbról nem ugyanoda tart.

6-14 **Megoldás:**

A függvényt csak azon a helyen kell vizsgálni, ahol megváltozik a hozzárendelés szabálya, azaz $x = 1$-ben. Ezen a helyen kívül biztosan folytonos a függvény, mert folytonos függvények szerepelnek a formulában mind $x > 1$, mind pedig $x < 1$ esetén. Akkor lesz $f$ folytonos az $x = 1$ helyen, ha itt létezik jobb és bal oldali határértéke, ezek megegyeznek, és egyenlők a függvény ezen helyen vett helyettesítési értékével.

Határozzuk meg ezt a három értéket. Kezdjük a függvény helyettesítési értékével.

$$f(1) = 1^2 + 3 = 4$$

Határozzuk meg a bal oldali határértéket. Csak be kell helyettesítenünk a megfelelő formulába.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$

Ezután a jobb oldali határértéket. Most is csak be kell helyettesítenünk, de természetesen a másik formulába.

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 4^x = 4^1 = 4$$

A három érték megegyezik, így a függvény folytonos az $x = 1$ helyen is.

6-15 **Megoldás:**

Vizsgáljuk meg külön a számláló, és külön a nevező határértékét.

$$\lim_{x\to 0} 2x = 2\cdot 0 = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0}(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}) = \sqrt{3+2\cdot 0}-\sqrt{3-2\cdot 0} = 0$$

Röviden tehát, egy „$\frac{0}{0}$ típusú” határértékkel van dolgunk.

Mivel a nevezőben két gyökös kifejezés különbségét látjuk, ezért célszerű gyöktelenítéssel próbálkozni.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x})}{(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x})}{(3+2x)-(3-2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x})}{4x}$$

$2x$-szel egyszerűsítve:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x})}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}}{2}$$

A nevező folytonos függvénye $x$-nek, és helyettesítési értéke nem zérus, így a határérték egyszerű behelyettesítéssel megkapható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}}{2} = \frac{\sqrt{3+2\cdot 0}+\sqrt{3-2\cdot 0}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

6-16 **Megoldás:**

Az egyenletnek biztosan van megoldása, mert a két oldal különbsége, $2x + \log(6x)$ folytonos minden $x > 0$ esetén: a 0-ban vett (jobb oldali) határértéke $(-\infty)$, a végtelenben vett határértéke pedig $(+\infty)$. Van tehát olyan *korlátos, zárt intervallum*, melynek bal végpontján e függvény negatív, a jobb végpontján pedig pozitív értéket vesz fel: Bolzano tétele miatt így az intervallum belsejében legalább egy helyen zérus a helyettesítési értéke.

Az egyenletet próbáljuk meg a Banach-fixponttétel alkalmazásával megoldani. Ehhez először $x = f(x)$ alakúra kell hozni az egyenletet. Legegyszerűbb ezt egy $(-2)$-vel való osztással megtenni:

$$x = -\frac{1}{2}\log(6x)$$

Formailag ez most már egy fixpont-probléma: a baj viszont az, hogy a jobb oldal mint $x$ függvénye *nem* képezi le a fixpont egy zárt környezetét önmagába, és nem kontrakció. Ha pl. az $x_0 := 1$ értékből indítjuk a fixpont-iterációt, $x_1$-re már negatív szám adódik $(-0.8959)$ adódik, és az iteráció nem is folytatható (negatív szám logaritmusa nem értelmes).

Ehelyett, vegyük az az eredeti egyenlet mindkét oldalának exponenciálisát: ez a jobb oldalon "eltünteti" a logaritmust: $e^{-2x} = 6x$, ahonnan

$$x = \frac{1}{6}e^{-2x}$$

Ez is egy fixpont-probléma. Jelölje a jobb oldali függvényt $f$, azaz $f(x) := \frac{1}{6}e^{-2x}$. Ez folytonos, monoton fogyó függvény, és a [0,1] zárt intervallumot önmagába képezi, mert $f(0) = 1 \in [0,1]$, és $f(1) = \frac{1}{6}e^{-2} \in [0,1]$. Állítjuk, hogy $f$ itt kontrakció is. A *Lagrange-középértéktétel* egyik következménye értelmében (7-23 állítás) elég látni, hogy $|f'|$ értékeinek maximuma ezen az intervallumon 1-nél kisebb. Ez pedig teljesül, mert $|f'(x) = |-\frac{2}{6}e^{-2x}| \leq \frac{2}{6} < 1$. Következésképp az egyenletnek a $[0,1]$ intervallumban egyetlenegy megoldása van, és az

$$x_{n+1} := \frac{1}{6}e^{-2x_n}$$

rekurzív sorozat bármely $x_0 \in [0,1]$ kezdőérték esetén ehhez a megoldáshoz ($f$ fixpontjához) konvergál.
$x_0 := 0$ esetén pl. a sorozat első néhány tagja: $x_1 = 0.1667$, $x_2 = 0.1194$, $x_3 = 0.1313$, $x_4 = 0.1282$, $x_6 = 0.1290$, $x_7 = 0.1288$, $x_8 = 0.1288$, $x_9 = 0.1288$,... és az első négy tizedesjegy a későbbiekben már nem változik. Tehát az egyenlet megoldása négy tizedesjegy pontossággal: $x = 0.1288$.

Megjegyzés: Ha az első – sikertelen – fixpont-iterációt a négy tizedesjegyre pontos $x_0 = 0.1288$ kezdőértékből indítjuk, akkor a sorozat első néhány tagja: $x_1 = 0.1289$, $x_2 = 0.1286$, $x_3 = 0.1296$, $x_4 = 0.1257$, $x_5 = 0.1411$, $x_6 = 0.0832$, $x_7 = 0.3473$, $x_8 = -0.3672$, és a sorozat tovább nem folytatható. Azaz a sorozat nemcsak, hogy nem konvergens, de gyorsan eltávolodik még a viszonylag pontos kezdőértéktől is.

**6-17 Megoldás:**

A számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség miatt minden $t \in \mathbf{R}$ esetén:

$$1 = \sqrt{e^t \cdot e^{-t}} \leq \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Speciálisan, legyen $t := \frac{x-y}{2}$, akkor innen

$$1 \leq \frac{e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $e^{\frac{x+y}{2}}$ tényezővel szorozva:

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq e^{\frac{x+y}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} = \frac{e^x + e^y}{2},$$

amivel a bizonyítást befejeztük.

# 17. lecke

# Differenciálás, bevezető

# 7. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása

Ebben a fejezetben a valós analízis egyik legfontosabb fogalmát, a differenciálhányadost vezetjük be. Számtalan közvetlen és közvetett alkalmazása közül említsük meg a szélsőérték problémák megoldását és a differenciálegyenletek témakörét. Ez utóbbi pl. fizikai, mérnöki, közgazdasági stb. folyamatok matematikai modellezésének elsőrangú eszköze.

## 7.1. A differenciálhányados

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy függvény, $x \in \mathcal{D}_f$ olyan pont, hogy nemcsak $x_0$ maga, hanem annak egy egész $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ alakú környezete is a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományba esik.

7-1. Definíció: Az $f$ függvény *differenciálható* (vagy *deriválható*) az $x_0$ pontban, ha az

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik és véges. Ekkor az $f'(x_0)$ számot az $f$ függvény $x_0$-beli *differenciálhányadosának* (vagy *deriváltjának*) nevezzük.

Ha $f$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, akkor röviden csak azt mondjuk, hogy $f$ *differenciálható*.

Néha (különösen, ha $f$-et bonyolult formula definiálja, és nem világos, hogy melyik betű jelenti az argumentumot), az $f'(x_0)$ deriváltat a $\frac{df}{dx}(x_0)$ szimbólummal is szokás jelölni. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ebben a jelölésmódban $\frac{df}{dx}$ *egybetartozó szimbólum*, és *nem tört*, a jelölés csak a differenciálhányados származtatására utal.

*Elnevezés*. A definícióban szereplő $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányadost (ahol $x \neq x_0$) az $f$ függvénynek az $[x_0, x]$ intervallumra vonatkozó, az $x_0$ ponthoz tartozó *különbségi hányadosának* (vagy *differenciahányadosának*) nevezzük.

Ha a különbségi hányados határértéke $x_0$-ban nem létezik, de létezik az $x_0$-ban vett bal oldali (jobb oldali) határérték, akkor azt mondjuk, hogy az $f$ függvény $x_0$-ban *balról* (*jobbról*) *differenciálható*, és a szóban forgó bal oldali (jobb oldali) $f'_-(x_0)$ (ill. $f'_+(x_0)$) határértéket a függvény *bal oldali* (*jobb oldali*) *deriváltjának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $f$ pontosan akkor deriválható $x_0$-ban, ha ugyanott balról és jobbról is deriválható, és a bal- és jobb oldali deriváltak megegyeznek.

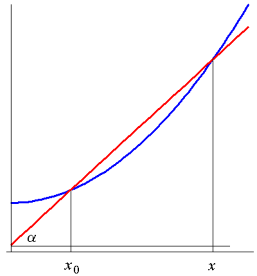
7-2. Definíció: Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Az $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ függvényt az $f$ függvény *deriváltfüggvényének* vagy röviden *deriváltjának* nevezzük. (Az $f'$ függvényt néha a $\frac{df}{dx}$ szimbólummal is jelöljük.)

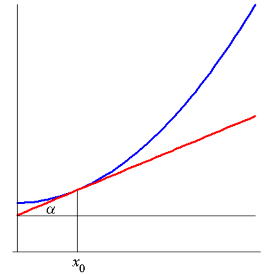
A különbségi hányados a függvény *relatív megváltozását* mutatja az $[x_0,x]$ intervallumban. Ennek megfelelően, a differenciálhányados a függvény $x_0$-beli lokális relatív megváltozását „méri” (másszóval a változás sebességét). Geometriailag nagyon szemléletes fogalmakról van szó. A különbségi hányados az $f$ függvény grafikonjának $(x_0,f(x_0))$ és $(x,f(x))$ pontjai által meghatározott szelő iránytangense. $x \to x_0$ esetén a szelők határhelyzete az $x_0$-beli *érintő* lesz, ily módon az $f'(x_0)$ differenciálhányados a grafikon $(x_0,f(x_0))$ pontjához húzott érintő iránytangense. Magának az érintőnek az egyenlete tehát

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(valóban, ez az egyenes illeszkedik az $(x_0,f(x_0))$ pontra, és meredeksége $f'(x_0)$).

Nyilvánvaló, hogy ha $x_0$-ban a bal-és jobb oldali deriváltak léteznek, de nem egyenlők, akkor $f$ grafikonjához az $(x_0,f(x_0))$ pontban két fél-érintő is húzható, amelyek azonban nem esnek egy egyenesbe. Ekkor az $x_0$ pontot az $f$ függvény *töréspontjának* is nevezzük.




25. ábra. tg $\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tg $\alpha = f'(x_0)$

Megjegyzés: Az $(x - x_0)$ különbséget az $f$ függvény *argumentumának megváltozásával* is interpretálhatjuk. Ekkor az $f(x) - f(x_0)$ különbség a *függvényérték megváltozása*. Jelölje röviden $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ és $\Delta x := x - x_0$, akkor

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

ami magyarázza a hagyományos $\frac{df}{dx}$ jelölést. Ha $(x - x_0)$-t $h$-val jelöljük, akkor

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Konkrét függvények esetén a derivált kiszámítása akár ezzel, akár a definícióban szereplő formulával történhet.

**Megjegyzés:** A függvényérték relatív változását a deriváltnál néha szemléletesebben mutatja a közgazdaságban fontos szerepet játszó *elaszticitás*. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy differenciálható függvény, akkor az $f$ függvény *$x$-beli elaszticitásának* az

$$Ef(x) := \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

számot nevezzük, feltéve, hogy $f(x) \neq 0$. Ha pl. $x$ valamely jószág árát, $f(x)$ pedig az iránta való keresletet jelenti az $x$ ár mellett, akkor az elaszticitás azt mutatja meg, hogy az ár 1% -os megváltozása kb. hány % -os változást okoz a keresletben. Ez nyomban adódik a definícióval egyenértékű alábbi összefüggésből:

$$Ef(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

**7-1. Példa:** Ha egy egyenesvonalú mozgást végző (pontszerű) test pillanatnyi helyzetét a $t \mapsto s(t)$ függvény írja le (ahol $t$ az idő), akkor az $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ különbségi hányados a $[t_0,t]$ időtartamra vonatkozó *átlagsebesség*. Ennek $t_0$-ban vett határértéke (azaz a $t_0$-beli differenciálhányados) a $t_0$-beli *pillanatnyi sebesség*. Az $s$ elmozdulás $v$ deriváltfüggvénye a *sebességfüggvény*. Ugyanígy, a $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ különbségi hányados a $[t_0,t]$ időtartamra vonatkozó *átlaggyorsulás*. Ennek $t_0$-ban vett határértéke a $t_0$-beli *pillanatnyi gyorsulás*.

**7-2. Példa:** (a konstans függvény deriváltja). Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := c$, ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. Akkor $f' \equiv 0$.

*Megoldás*. Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén ugyanis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0,$$

ahonnan $f'(x) = 0$ következik.

7-3. Példa: (az identikus leképezés deriváltja). Legyen $f(x) := x$ $(x \in \mathbf{R})$. Akkor $f' \equiv 1$.

*Megoldás*. Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén ugyanis

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1,$$

ahonnan $f'(x) = 1$ következik.

7-4. Példa: Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := 3x^2 + 2$ . Számítsuk ki e függvény deriváltját egy tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen.

*Megoldás*. A különbségi hányados

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 + 2 - 3x^2 - 2}{h} = \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = 6x + 3h.$$

A jobb oldal határértéke $h \to 0$ mellett nyilván $6x$, ezért $f'x) = 6x$.

Az előző példából sejthető, hogy bonyolultabb formulával adott függvények deriváltjának kiszámítása bonyolult határértékek meghatározásához vezet. Olyan jellegű tételekre van tehát szükségünk, melyek a derivált kiszámítását (amennyire csak lehetséges) leegyszerűsítik.

Ilyen technikák ismertetése előtt két tételt igazolunk a deriválhatóságra vonatkozóan. Az első azt állítja, hogy a differenciálhatóság erősebb fogalom a folytonosságnál.

7-1. Tétel: Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény deriválható egy $x_0$ pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás:

Legyen $x_n \to x_0$ tetszőleges sorozat ($x_n \neq x_0$), akkor

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| \cdot |x_n - x_0| \to |f'(x_0)| \cdot 0 = 0,$$

azaz $f$ valóban folytonos $x_0$-ban. $\square$

A differenciálható függvényeket sokszor röviden „sima” függvényeknek nevezzük, arra utalva, hogy a függvénynek ekkor sem szakadásai, sem töréspontjai nincsenek.

A következő állítás pedig a derivált egyik legfontosabb alkalmazását alapozza meg.

**7-2. Tétel:** Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény deriválható egy $x_0$ pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor szükségképp $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $f$-nek $x_0$-ban pl. lokális maximuma van (a bizonyítás a minimum esetében hasonlóan végezhető el). Legyen $x_n \to x_0$ tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_n > x_0$ minden $n$ index esetén. Ekkor $f(x_n) \leq f(x_0)$ miatt $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \leq 0$, így a határértékre is teljesül, hogy $f'(x_0) \leq 0$. Ha pedig $x_n \to x_0$ tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_n < x_0$ minden $n$ index esetén, akkor most $f(x_n) \leq f(x_0)$ miatt $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \geq 0$, ahonnan $f'(x_0) \geq 0$. E két egyenlőtlenségből $f'(x_0) = 0$ adódik, ahogy állítottuk. $\square$

A tétel értelmében, ha egy adott differenciálható függvény lokális szélsőértékeit akarjuk feltérképezni, elég meghatározni a deriváltfüggvény zérushelyeit. Lokális szélsőértékek (ha vannak egyáltalán) csak itt lehetnek. Hogy aztán e pontokban valóban van-e szélsőérték, és ha igen, akkor milyen típusú, ezt további meggondolásokkal kell eldönteni. A 7.6. szakaszban részletesebben foglalkozunk ezzel a problémakörrel.

Megjegyzés: 1. Vigyázat, a 7-2. Tétel csak *differenciálható* függvényekre igaz! Így pl. az $x \mapsto |x|$ abszolútérték-függvénynek a $0$-ban nyilván lokális minimuma van, de itt a függvény nem deriválható (bizonyítsuk ezt be!); a deriváltfüggvénynek sehol sincs zérushelye (bizonyítsuk be ezt is!), így a $0$-beli minimum *nem* kapható meg a derivált zérushelyeinek feltérképezésével. Ugyancsak nem vonatkozik a tétel olyan esetekre, ahol (tipikusan az értelmezési tartomány határán) csak egyoldali deriváltak léteznek. Így pl. a $[0,1]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x$ identikus leképezésnek az értelmezési tartomány bal végpontján lokális minimuma, jobb végpontján lokális maximuma van; ugyanakkor a $0$-ban vett jobb oldali és az $1$-ben vett bal oldali derivált (és az összes többi pontban vett „közönséges” derivált is) a definícióból azonnal következően $1$-gyel egyenlő.
2. A 7-2. Tétel *nem fordítható meg*! Abból, hogy egy függvény deriváltja valahol $0$, nem következik, hogy ott a függvénynek szélsőértéke is van. Ellenpéldaként tekintsük az $x \mapsto x^3$ leképezést. A következő szakaszban megmutatjuk, hogy ennek deriváltja $x$-ben $3x^2$, így a $0$-ban a derivált eltűnik. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a leképezésnek a $0$-ban nincs lokális szélsőértéke. A függvény minden pozitív helyen pozitív, minden negatív helyen pedig negatív értéket vesz fel.

## 7.2. A derivált kiszámítása

Először az algebrai műveletekkel képezett függvények deriválhatóságát vizsgáljuk.

**7-3. Tétel:** (differenciálási szabályok). Ha az $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények mindketten differenciálhatók az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, akkor
$(a)$ $f+g$ is differenciálható $x_0$-ban és

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$(b)$ $f-g$ is differenciálható $x_0$-ban és

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0),$$

$(c)$ $fg$ is differenciálható $x_0$-ban és

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

$(d)$ $\frac{f}{g}$ is differenciálható $x_0$-ban (feltéve, hogy $g(x_0) \neq 0$) és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

**Bizonyítás:**

$(a)$ és $(b)$ a definícióból nyomban adódik.

$(c)$ Egyszerű algebrai átalakításokkal kapjuk, hogy:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

A jobb oldal első tagja $x \to x_0$ esetén $g$ folytonossága miatt (7-1. Tétel) $f'(x_0)g(x_0)$-hoz, míg a második tag definíció szerint $f(x_0)g'(x_0)$-hoz tart, ami az állítást igazolja.

$(d)$ Hasonló átalakítási trükköt alkalmazunk:

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left( g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right).$$

A jobb oldalon a nevező $x \to x_0$ esetén $g$ folytonossága miatt (7-1. Tétel) $(g(x_0))^2$-hez, a zárójeles kifejezés első tagja $f'(x_0)g(x_0)$-hoz, a második pedig $f(x_0)g'(x_0)$-hoz tart. Innen az állítás már következik. □

Megjegyzés: Már tudjuk, hogy a konstans függvény deriváltja mindenütt 0 (ld. a 7-2. Példát). Ezt kombinálva a 7-3. Tétel $(c)$ és $(d)$ pontjával, a következő eredményeket kapjuk (amelyeket szintén érdemes megjegyezni):
$(e)$ Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, akkor minden $c \in \mathbf{R}$ konstans esetén a $c \cdot f$ függvény is differenciálható $x_0$-ban, és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

$(f)$ Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban és $f(x_0) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{f}$ reciprokfüggvény is differenciálható $x_0$-ban, és

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

A szorzat deriválási szabályát (7-3. Tétel $(c)$ pont), értelemszerűen általánosíthatjuk kettőnél több tényezős (de véges sok tényezőből álló) szorzatokra. Így pl. (a rövidség kedvéért az argumentumokat elhagyva) háromtényezős szorzatra

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh',$$

négytényezős szorzatra

$$(abcd)' = a'bcd + ab'cd + abc'd + abcd',$$

és így tovább.

**7-4. Tétel:** (összetett függvény differenciálása). Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, a $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény pedig differenciálható az $f(x_0)$ pontban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is differenciálható $x_0$-ban, és

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

**Bizonyítás:**

Legyen $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Tegyük fel először, hogy $f(x_n) \neq f(x_0)$ semmilyen indexre. Ekkor:

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

ahonnan a jobb oldal határértéke nyilván $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Az állítás igaz marad akkor is, ha *véges sok* indexre $f(x_n) = f(x_0)$ (a fenti kifejezés értelmes marad minden, elég nagy indexre, így a határérték változatlan marad). Ha pedig *végtelen sok* indexre teljesül, hogy $f(x_n) = f(x_0)$, akkor szükségképp $f'(x_0) = 0$ (vajon miért?!), továbbá ezen indexekre

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0,$$

a fennmaradó indexekre pedig

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0,$$

tehát a különbségi hányados minden esetben a $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ számhoz tart. $\square$

Mivel a függvénykompozíció során a külső $g$ függvényt úgy is felfoghatjuk, hogy az valójában $f$-től (pontosabban az $f(x)$ függvényértékektől) függ, a 7-4. Tétel állítása az alábbi alakba is írható:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Ezen forma alapján a 7-4. Tételt *láncszabálynak* is nevezik. Hasonló állítás igaz többszörösen összetett függvényekre is. Pl., ha $u(x) = h(g(f(x)))$, akkor

$$u'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$$

vagy röviden

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg} \cdot \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

7-5. Tétel: (az inverz függvény differenciálása). Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, $f'(x_0) \neq 0$, az $f^{-1}$ inverz függvény pedig létezik és folytonos az $f(x_0)$ pont egy környezetében, akkor $f^{-1}$ differenciálható $f(x_0)$-ban, és

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bizonyítás:

Jelölje $y_0 := f(x_0)$, és legyen $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ $(= \mathcal{R}_f)$ tetszőleges. Jelölje továbbá $x := f^{-1}(y)$, akkor

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Ha most $y \to x_0$, akkor $f^{-1}$ folytonossága miatt $x \to x_0$, így a jobb oldal $\frac{1}{f'(x_0)}$-hoz tart, ahogy állítottuk. □

**Megjegyzés:** Mivel $x_0 = f^{-1}(y_0)$, a tétel állítása az

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

alakban is írható.

Ha az $f$ leképezést, pongyolán fogalmazva, egy $x \mapsto f$ leképezésnek fogjuk fel (ami tehát az $x$-értékekhez $f$-értékeket rendel), akkor az inverz leképezés egy $f \mapsto x$ típusú leképezés. Ebben a felfogásban az inverz függvény deriváltja $\frac{dx}{df}$, a 7-5. Tétel állítása pedig a következő szemléletes (bár nem egészen korrekt, mindenesetre könnyen megjegyezhető)

$$\frac{dx}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

alakba írható.

**7-6. Tétel:** (paraméteresen adott függvény deriválása). Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, hogy:
($a$) $f$ és $g$ differenciálhatók egy $t_0 \in \mathbf{R}$ pontban és $f'(t_0) \neq 0$;
($b$) az $f^{-1}$ inverz függvény létezik és folytonos az $f(t_0)$ pont egy környezetében.
Akkor az $x := f(t)$, $y := g(t)$ paraméteresen megadott függvény (azaz az $y(x) := g(f^{-1}(x))$ formulával értelmezett függvény) differenciálható az $x_0 := f(t_0)$ pontban, és

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

**Bizonyítás:**

A szóban forgó, az $y(x) := g(f^{-1}(x))$ formulával értelmezett függvény deriváltja (felhasználva a 7-4. és 7-5. Tételeket):

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = g'(f^{-1}(x_0)) \cdot (f^{-1})'(x_0) = \frac{g'(f^{-1}(x_0))}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

□

A tétel állítása a következő szemléletes, könnyen megjegyezhető formába is írható:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

# 18. lecke

# Elemi függvények deriváltjai

## 7.3. Néhány elemi függvény deriváltja

A következő elemi függvények jól ismert formulákkal adottak: feltesszük, hogy (szokásos módon) a lehető legbővebb tartományon értelmezettek. A rövidség kedvéért a deriválást a formula utáni vessző jelöli.

Az alábbi állítást már láttuk (7-2. Példa), itt csak a teljesség kedvéért ismételjük meg.

**7-7. Állítás:** (a konstans függvény deriváltja). Tekintsük az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto c$ függvényt (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám). Akkor

$$(c)' \equiv 0.$$

**7-8. Állítás:** (lineáris függvény deriváltja). Tekintsük az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax$ függvényt (ahol $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám). Akkor

$$(ax)' \equiv a \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

**Bizonyítás:**

Valóban, $\frac{a(x+h)-ax}{h} \equiv a$, ahonnan az állítás már következik. □

**7-9. Állítás:** (kvadratikus függvény deriváltja).

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

**Bizonyítás:**

A szorzat deriválására vonatkozó 7-3. $(c)$ Tétel és az előző állítás szerint

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

□

**7-10. Állítás:** (hatványfüggvény deriváltja). Az előző állításhoz hasonlóan:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és így tovább, minden $n \in \mathbf{N}$-re:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

**7-11. Állítás:** (az exponenciális függvény deriváltja).

$$(e^x)' = e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

**Bizonyítás:**

Felhasználva a 6-20. Példa eredményét:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \qquad (\text{ha } h \to 0).$$

□

**7-12. Állítás:** (tetszőleges alapú exponenciális függvény deriváltja).

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $a > 0$, $a \neq 1$ tetszőleges szám.

**Bizonyítás:**

Definíció szerint $a^x = e^{x \cdot \log a}$. Felhasználva az előző állítást és az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt:

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \log a})' = e^{x \cdot \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a.$$

$\square$

**7-13. Állítás:** (a természetes alapú logaritmusfüggvény deriváltja).

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

**Bizonyítás:**

Jelölje $f(x) := \log x$, $g(x) := e^x$, akkor $f = g^{-1}$. Felhasználva az inverz függvény deriválására vonatkozó 7-5. Tételt:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Megjegyezzük, hogy a deriváltat közvetlenül is kiszámíthatjuk:

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{h} = \frac{1}{x} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \to \frac{1}{x},$$

ha $h \to 0$. Itt felhasználtuk a $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 0$ nevezetes határértéket. □

**7-14. Állítás:** (tetszőleges alapú logaritmusfüggvény deriváltja).

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \log a} \qquad (x > 0),$$

ahol $a > 0$, $a \neq 1$ tetszőleges szám.

**Bizonyítás:**

Definíció szerint $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Innen, felhasználva az előző állítást:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \cdot \log a}.$$

□

**7-15. Állítás:** (általános, valós kitevőjű hatványfüggvény deriváltja). Legyen $\alpha \in \mathbf{R}$ tetszőleges valós szám (nem feltétlen egész), akkor

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x > 0),$$

azaz a 7-10. Állításban szereplő formula nemcsak egész, hanem tetszőleges valós kitevőkre is érvényes.

**Bizonyítás:**

Definíció szerint $x^\alpha = e^{\alpha\cdot\log x}$. Innen, felhasználva az exponenciális és a logaritmusfüggvény deriváltját valamint az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\cdot\log x})' = e^{\alpha\cdot\log x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^{\alpha-1}\cdot\alpha.$$

□

Speciálisan $\alpha = \frac{1}{2}$ mellett (érdemes külön is megjegyezni):

**7-16. Állítás:** (a gyökfüggvény deriváltja).

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

Megjegyezzük, hogy a gyökfüggvény a 0-ban nem differenciálható (vajon miért?).

**7-17. Állítás:** (trigonometrikus függvények deriváltja).

(*a*)

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

(*b*)

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

(*c*)

$$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (x \in \mathbf{R}\setminus\{\pi\cdot(k+\frac{1}{2}):\ k\in\mathbf{Z}\}),$$

(*d*)

$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás:

($a$) Felírva a különbségi hányadost:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=$$

$$=\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h^2}\cdot h+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\to\cos x,$$

ha $h\to 0$. Itt felhasználtuk a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ és a $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ nevezetes határértékeket.

A ($b$) állítás hasonlóképp igazolható, de felhasználhatjuk a $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ azonosságot is:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x.$$

ahol alkalmaztuk az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt.

A ($c$) állítás ($a$)-ból és ($b$)-ből a hányados deriválásáról szóló 7-3. Tétel alkalmazásával adódik:

$$(\text{tg } x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(felhasználva a $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ azonosságot).

Végül a ($d$) állításban felhasználjuk az inverz függvény deriválásáról szóló 7-5. Tételt. Legyenek $f(x):=\text{arctg } x$, $g(z):=\text{tg } z$, akkor $g$ inverze épp $f$, és:

$$f'(x)=(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\cos^2\text{arctg } x.$$

Jelölje most a rövidség kedvéért $z:=\text{arctg } x$, akkor $x=\text{tg } z=\frac{\sin z}{\cos z}$. Innen $x^2=\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, ahonnan $\cos^2 z$ kifejezhető $x$ függvényében: $\cos^2(\text{arctg } x)=\cos^2 z=\frac{1}{1+x^2}$, ahogy állítottuk. □

**7-18. Állítás:** (hiperbolikus függvények deriváltja).

$(a)$

$$(\text{sh } x)' = \text{ch } x,$$

$(b)$

$$(\text{ch } x)' = \text{sh } x.$$

**Bizonyítás:**

A hiperbolikus függvények definíciójából, felhasználva az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt:

$$(\text{sh } x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^2 + e^{-x}}{2} = \text{ch } x,$$

és hasonlóan:

$$(\text{ch } x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^2 - e^{-x}}{2} = \text{sh } x.$$

□

A fenti formulák alapján és a deriválási tételek felhasználásával lényegében minden, a gyakorlatban előforduló függvény deriváltját már ki tudjuk számítani, még az olyan szokatlan és/vagy bonyolult függvényekét is, amelyeket az alábbi példák illusztrálnak.

**7-5. Példa:** Legyen $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^x$ . Számítsuk ki $f$ deriváltját.

*Megoldás*. Definíció szerint $x^x = e^{x \cdot \log x}$, innen az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tétel szerint $f$ differenciálható, és

$$f'(x) = e^{x \cdot \log x} \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log x + 1).$$

Egy másik, jól használható módszer ilyen típusú feladatok megoldására a *logaritmikus deriválás*. Vegyük az $f(x) = x^x$ egyenlőség mindkét oldalának logaritmusát: $\log f(x) = x \log x$. Deriváljuk mindkét oldalt, és a bal oldalon használjuk az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

A kapott egyenlőségből $f'(x)$-et kifejezve

$$f'(x) = f(x) \cdot (\log x + 1) = x^x \cdot (\log x + 1).$$

egyezésben a korábban kapott eredménnyel.

Bár a logaritmikus deriválás mindig megkerülhető, a módszer azonban sokszor gyorsabban vezet célhoz. Különösen igaz ez olyan esetekben, ahol olyan törtkifejezést kell deriválni, amelyben a számláló és a nevező is sokténynyezős szorzat. Most ilyen esetre mutatunk példát.

**7-6. Példa:** Legyen $f(x) := \frac{x^p(ax+b)^q}{(cx+d)^r}$ (a lehető legbővebb tartományon értelmezve). Számítsuk ki $f$ deriváltját.

*Megoldás*. Vegyük a definiáló egyenlőség mindkét oldalának logaritmusát:

$$\log f(x) = p \log x + q \log(ax + b) - r \log(cx + d).$$

Mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{p}{x} + \frac{aq}{ax + b} - \frac{cr}{cx + d},$$

ahonnan $f'(x)$ már kifejezhető:

$$f'(x) = \frac{x^p(ax + b)^q}{(cx + d)^r} \cdot \left(\frac{p}{x} + \frac{aq}{ax + b} - \frac{cr}{cx + d}\right).$$

## 7.4. Implicit függvények deriválása

Végül röviden vázoljuk az *implicit módon adott függvények* deriválásának technikáját. Pontos tételek kimondása helyett a problémát két példán keresztül mutatjuk be.

**7-7. Példa:** Tegyük fel, hogy egy $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y(x)$ típusú (alkalmas intervallumon értelmezett) függvény explicit formula helyett az alábbi egyenlőséggel van megadva:

$$(1 + x) \cdot y^{3/2} = 3.$$

Keressük az $y$ függvény deriváltját egy $x$ helyen.

*Megoldás*. A természetes megközelítés, hogy a definiáló egyenlőségből $y$-t kifejezzük $x$ függvényeként:

$$y = \left(\frac{3}{1+x}\right)^{2/3} = 3^{2/3} \cdot (1+x)^{-2/3},$$

majd deriválunk:

$$y' = -3^{2/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+x)^{-5/3}.$$

Azonban ez az út nem mindig járható, mert sok esetben $y$-t nem is lehet explicit formában kifejezni.

Ehelyett deriváljuk közvetlenül a definiáló egyenlőség mindkét oldalát. A bal oldalon alkalmazzuk az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt:

$$y^{3/2} + (1+x) \cdot \frac{3}{2} \cdot y^{1/2} \cdot y' = 0.$$

Ebből $y'$ kifejezhető:

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot y.$$

$y$ helyére akár a korábban kapott kifejezést is beírhatjuk:

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 3^{2/3} \cdot (1+x)^{-2/3} = -\frac{2}{3} \cdot 3^{2/3} \cdot (1+x)^{-5/3},$$

egyezésben az előző eredménnyel.

A bemutatott *implicit differenciálási módszer* különösen akkor előnyös, ha a deriváltat csak néhány, adott $(x,y)$ koordinátákkal jellemzett pontban kell kiszámítani. Ezt illusztrálja a következő példa.

7-8. Példa: Tekintsük azt az (alkalmas intervallumon definiált) $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y(x)$ típusú függvényt, amelyet az alábbi egyenlet határoz meg:

$$x + y = y^7 - x^3 + 2y^3.$$

Számítsuk ki a deriváltat az $x = 1$, $y = 1$ koordinátájú helyen (amely kielégíti az egyenletet, azaz az $(1,1)$ pont rajta van az $y$ függvény grafikonján).

*Megoldás*. Most $y$-t nem tudjuk explicit formában kifejezni $x$ függvényeként (ehhez 7-edfokú egyenletet kellene megoldani). Deriváljuk az egyenlőség mindkét oldalát, a bal oldalon alkalmazva az összetett függvény deriválásáról szóló 7-4. Tételt:

$$1 + y' = 7y^6y' - 3x^2 + 6y^2y'$$

Innen $y'$ kifejezhető. A konkrét $(x,y) = (1,1)$ helyen $y'(1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

# 19. lecke

## Középértéktételek, alkalmazások

## 7.5. A differenciálszámítás középértéktételei és alkalmazásai

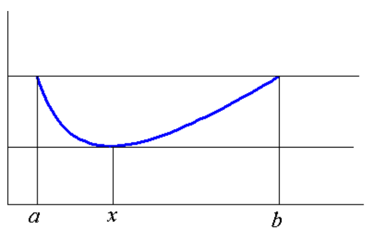
Ebben a szakaszban olyan jellegű tételeket mondunk ki és bizonyítunk be, amelyek intervallumon értelmezett függvényeknek az intervallumra vonatkoztatott különbségi hányadosai és valamely „közbülső” helyen vett differenciálhányadosai közötti kapcsolatra utalnak.

*E szakaszban mindvégig feltesszük, hogy az itt szereplő függvények folytonosak egy korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon, a nyílt $(a,b)$ intervallum pontjaiban pedig differenciálhatók.* A végpontokban való egyoldali differenciálhatóságot nem szükséges feltenni.

**7-19. Tétel:** (Rolle tétele). Ha $f(a) = f(b)$, akkor van (legalább egy) olyan $x \in (a,b)$ pont, hogy $f'(x) = 0$.

**Bizonyítás:**

Ha $f$ konstans függvény, akkor deriváltja azonosan 0, így a tétel állítása nyilvánvalóan igaz. Ha $f$ nem konstans függvény, akkor Weierstrass tétele (6-6. Tétel) miatt $[a,b]$-n van maximumhelye és minimumhelye. Ezek közül legalább egyik a nyílt $(a,b)$ intervallumba esik, azaz nem lehet mindkettő az intervallum végpontja (mert akkor $f$ konstans volna). Jelölje $x$ a nyílt $(a,b)$ intervallumba eső maximum- vagy minimumhelyet. $f$ deriváltja itt szükségképp zérus (7-2. Tétel). □




26. ábra. A Rolle-tétel szemléltetése

A tétel geometriailag nagyon szemléletes. Azt fejezi ki, hogy az $f$ függvény grafikonjának $[a,b]$ intervallumra vonatkozó (vízszintes!) szelője önmagával párhuzamosan elmozgatható oly módon, hogy az elmozgatott egyenes érinti a grafikont valamilyen közbülső helyen.

Rolle tétele általánosítható nem feltétlen vízszintes szelővel rendelkező függvényekre.

**7-20. Tétel:** (Lagrange-féle középértéktétel). Létezik (legalább egy) olyan $x \in (a,b)$ pont, hogy

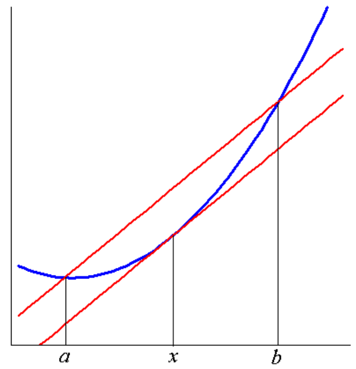
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Bizonyítás:**

Legyen $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ez az $F$ függvény nyilván folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $(a,b)$-n, továbbá könnyen ellenőrizhetően $F(a) = F(b) = f(a)$. $F$-re alkalmazva Rolle tételét (7-19. Tétel), kapjuk, hogy alkalmas $x \in (a,b)$ helyen $F'(x) = 0$. Világos, hogy $F'(x) := f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ezért $f'x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ahogy azt állítottuk. □

A Lagrange-középértéktétel szemléletes jelentése hasonló a Rolle tételéhez. Azt fejezi ki, hogy az $f$ függvény grafikonjának $[a,b]$ intervallumra vonatkozó szelője önmagával párhuzamosan elmozgatható oly módon, hogy az elmozgatott egyenes érinti a grafikont valamilyen közbenső helyen. Más megfogalmazásban: az $[a,b]$ intervallumra vonatkozó különbségi hányados *pontosan* egyenlő a függvény valamely közbülső helyen vett differenciálhányadosával.

A tétel tovább általánosítható.




27. ábra. A Lagrange-tétel szemléltetése

**7-21. Tétel:** (Cauchy-féle középértéktétel). Legyen $f$ és $g$ a szakasz elején megfogalmazott tulajdonságú függvény. Tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ semmilyen $x \in (a,b)$ esetén. Akkor létezik (legalább egy) olyan $x \in (a,b)$ pont, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Bizonyítás:**

A bizonyítás technikája hasonló az előző tétel bizonyításához. Legyen $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Az $F$ függvény nyilván folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $(a,b)$-n, továbbá $F(a) = F(b) = f(a)$. $F$-re alkalmazva

Rolle tételét (7-19. Tétel), kapjuk, hogy alkalmas $x \in (a,b)$ helyen $F'(x) = 0$. Mivel

$$F'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

ahogy állítottuk. □

A következőkben a fenti középértéktételek néhány közvetlen alkalmazását mutatjuk be. Első példánk előtt emlékeztetünk arra, hogy a konstans függvény deriváltja azonosan 0 (7-2. Példa). Most már meg tudjuk mutatni, hogy ennek megfordítása is igaz.

7-22. Állítás: Ha az $f$ függvény deriváltja azonosan 0 az $(a,b)$ intervallumon, akkor $f$ szükségképp azonosan konstans $(a,b)$-n.

Bizonyítás:

Legyen $x \in (a,b)$ tetszőleges. Alkalmazzuk a Lagrange-középértéktételt az $[a,x]$ intervallumra. Eszerint alkalmas $t \in (a,x)$-re $f'(t) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ teljesül. Ámde $f'(t) = 0$, ezért $f(x) = f(a)$. Tehát $f$ valóban azonosan konstans $(a,b)$-n (mindenütt az $f(a)$ értéket veszi fel). □

Következő példánk a Banach-fixponttétellel (6-9. Tétel) kapcsolatos. Emlékeztetünk rá, hogy a fixpont létezésének feltételei között az szerepelt, hogy a szóban forgó $f$ függvény kontrakció legyen, azaz kielégítse a Lipschitz-feltételt valamely 1-nél kisebb Lipschitz-állandóval. A gyakorlatban ezt eléggé nehézkes ellenőrizni. Sokkal egyszerűbb a helyzet, ha $f$ differenciálható is.

7-23. Állítás: Ha az $f'$ deriváltfüggvény folytonos a (korlátos és zárt) $[a,b]$ intervallumon és itt $|f'| < 1$ teljesül, akkor $f$ kontrakció $[a,b]$-n.

Bizonyítás:

Jelölje $q$ az $|f'|$ függvény $[a,b]$-n vett maximumát (ez Weierstrass tétele értelmében létezik, ld. a 6-6. Tételt). Ekkor nyilván $q < 1$. Legyenek $x_1,x_2 \in [a,b]$ tetszőleges pontok. Az $[x_1,x_2]$ intervallumra a Lagrange-középértéktételt felhasználva kapjuk, hogy van olyan $x \in (x_1,x_2)$ pont, hogy

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(x)| \cdot |x_1 - x_2| \leq q \cdot |x_1 - x_2|,$$

azaz $f$ valóban kontrakció $[a,b]$-n. $\square$

Most megmutatjuk, hogy egy függvény monoton növekedése illetve fogyása eldönthető pusztán a deriváltfüggvény előjelének ismeretében:

7-24. Állítás: A differenciálható $f$ függvény pontosan akkor monoton növő (fogyó) az $(a,b)$ intervallumon, ha $f' \geq 0$ $(a,b)$-n (ill. $f' \leq 0$ $(a,b)$-n).

Bizonyítás:

Csak a monoton növekedés esetével foglalkozunk, a másik eset hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel, hogy $f$ monoton növő $(a,b)$-n, és legyenek $a < x_0 < x < b$ tetszőleges számok. A monoton növekedés miatt $f(x_0) \leq f(x)$, következésképpen $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Ebből az $x \to x_0$ határátmenetet véve kapjuk az $f'(x_0) \geq 0$ egyenlőtéenséget. Ez igaz minden $a < x_0 < b$ esetén, azaz $f' \geq 0$ $(a,b)$-n.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f' \geq 0$ $(a,b)$-n, és legyenek $a < x_1 < x_2 < b$ tetszőleges pontok. A Lagrange-középértéktételt alkalmazva az $[x_1,x_2]$ intervallumra kapjuk, hogy alkalmas $x \in (x_1,x_2)$ esetén

$f'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Ámde $f'(x) \geq 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, azaz $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ez igaz minden $a < x_1 < x_2 < b$ esetén, tehát $f$ monoton nő $(a,b)$-n. □

Ez utóbbi állítás a valós függvények menetének vizsgálatakor játszik fontos szerepet. Egyúttal egy elegendő feltételt is kapunk a lokális szélsőértékek létezésére (vö. a 7-2. Tétel utáni megjegyzéssel, amely szerint abból, hogy valamely pontban a függvény deriváltja 0, még nem következik, hogy ott szükségképp szélsőérték is van).

**7-25. Következmény:** Ha valamely $x_0 \in (a,b)$ helyen $f'(x_0) = 0$ és $x_0$-ban a deriváltfüggvény *előjelet vált*, azaz
($a$) egy $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon $f' \geq 0$ és egy $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon pedig $f' \leq 0$,
vagy
($b$) egy $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon $f' \leq 0$, egy $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon pedig $f' \geq 0$
(alkalmas $\delta,\varepsilon$ pozitív számok mellett), akkor $f$-nek $x_0$-ban biztosan lokális szélsőértéke van, éspedig az ($a$) esetben lokális maximuma, a ($b$) esetben pedig lokális minimuma.

**Bizonyítás:**

Az ($a$) esetben a 7-24. Állítás értelmében $f$ monoton nő az $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon és monoton fogy az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon, $x_0$-ban tehát lokális maximuma van. Hasonlóan, a ($b$) esetben $f$ monoton fogy az $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon és monoton nő az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon, $x_0$-ban tehát lokális minimuma van.

A következő szakaszban a szélsőérték létezésének eldöntésére még egyszerűbb feltételt fogalmazunk meg.

Megjegyzés: Ne gondoljuk, hogy egy függvény lokális szélsőértéke mindig ilyen tulajdonságú, azaz monoton szakaszok „elválasztópontja” (bár a legtöbb gyakorlati esetben ez igaz). Ellenpéldaként tekintsük pl. az alábbi formulával értelmezett függvényt:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt differenciálható (a 0-ban is! - bizonyítsuk ezt be!). A függvénynek a 0-ban nyilván minimuma van, mert $f(0) = 0$ és minden $x$-re $f(x) \geq 0$. Ugyanakkor a 0-nak bármilyen kis környezetében végtelen sok hullámot vet, azaz nincs olyan bal- ill. jobb oldali környezete a 0-nak, ahol $f$ monoton volna.

Végül a középértéktételek egy határértékszámítási alkalmazását mutatjuk be. Ennek alapja az alábbi tétel.

7-26. Tétel: (L'Hospital-szabály). Legyenek az $f$ és $g$ függvények differenciálhatók az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont egy környezetében. Ha
($a$) $f(x_0) = g(x_0) = 0$ és
($b$) a $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik,
akkor a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás:

A Cauchy-középértéktétel (7-21. Tétel) szerint tetszőleges $x < x_0$-hoz van oly $t \in (x,x_0)$, hogy $\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ (itt felhasználtuk az ($a$) feltételt). Ha most $x \to x_0$, akkor nyilván $t \to x_0$ is teljesül. A bal oldalnak a ($b$) feltétel szerint létezik határértéke, ezért a jobb oldalnak is létezik, és ezek egyenlők. $\square$

A tétel az ún. „0/0" típusú határértékek kiszámítására ad lehetőséget. A módszer a gyakorlatban akkor használható, ha az új $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték kiszámítása egyszerűbb, mint az eredeti határértéké. Előfordulhat, hogy ehhez a fenti tételt többször is kell alkalmazni egymás után.

**7-9. Példa:** Számítsuk ki a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{\text{arctg}\, x}$$

határértéket (ha létezik egyáltalán).

*Megoldás*. Könnyű látni, hogy a L'Hospital-szabály feltételei teljesülnek a 0 pont körül. A L'Hospital-szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{\text{arctg}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x^2}} = 1,$$

mivel a számláló és nevező deriváltjai a 0-ban folytonos függvények, így hányadosuk határértéke egyszerűen a helyettesítési értékük hányadosa (ez értelmezve van, mert a nevező 0-ban vett deriváltja 0-tól különbözik).

**7-10. Példa:** Számítsuk ki a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\text{sh}^2 x}$$

határértéket (ha létezik egyáltalán).

*Megoldás*. A L'Hospital-szabály feltételei ismét teljesülnek a 0 körül. Innen kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\text{sh}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2\text{sh}\, x \text{ch}\, x} = -\left( \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\text{ch}\, x} \right) \cdot \left( \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\text{sh}\, x} \right).$$

A jobb oldali első határérték a kifejezés helyettesítési értéke, azaz $\frac{1}{2}$. A második határértékre pedig ismét alkalmazható a L'Hospital-szabály, ahonnan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} = -\frac{1}{2}.$$

Megjegyzés: Gyakori hiba, hogy nem ellenőrizzük a L'Hospital-szabály feltételeinek meglétét, mindenekelőtt azt, hogy vajon teljesül-e, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ennek elmulasztása természetesen hibás eredményekhez vezethet.

A L'Hospital-szabály egy jól használható, „mechanikus” eszköz bizonyos határértékek kiszámítására. Használatának veszélye éppen ebben van. Előfordulhat ugyanis, hogy ha az adódó egyszerűsítési lehetőségeket nem használjuk ki, akkor a L'Hospital-szabály az eredetinél bonyolultabb számolásokhoz vezet. Ilyen egyszerűsítési lehetőség az előző példában az $\frac{1}{2\operatorname{ch} x}$ tényező kiemelése, melynek 0-beli határértéke egyszerűen a helyettesítési érték. Még világosabban látható ez a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{1000} x}{x^{1000}}$ határérték példáján. A mechanikus hozzáállás szerint ennek kiszámítása a L'Hospital-szabály 1000-szeri alkalmazásával kellene, hogy történjék, ha nem vesszük észre, hogy ez a határérték a már ismert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték 1000-ik hatványa, azaz 1.

Megjegyzés: A tételt a „0/0” típusú határértékekre mondtuk ki. Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy hasonló L'Hospital-szabály alkalmazható az ún. „$\frac{+\infty}{+\infty}$” típusú határértékekre is, amikor tehát az $f(x_0) = g(x_0) = 0$ feltétel helyett a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ egyenlőséget tesszük fel.

## 7.6. Magasabbrendű deriváltak és szélsőértékfeladatok

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy intervallumon differenciálható függvény.

**7-3. Definíció:** Az $f'$ deriváltfüggvény valamely $x_0$ pontbeli deriváltját az eredeti $f$ függvény $x_0$-beli *másodrendű differenciálhányadosának* (*másodrendű deriváltjának*) nevezzük, és az $f''(x_0)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ szimbólumok valamelyikével jelöljük. Hasonlóan, az $f'$ deriváltfüggvény deriváltfüggvényét az eredeti $f$ függvény *másodrendű deriváltfüggvényének* nevezzük. Jele $f''$ vagy $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Hasonlóan definiáljuk a harmadrendű, negyedrendű stb. deriváltakat is. A $k$-adrendű deriváltfüggvény jele $f^{(k)}$ vagy $\frac{d^k f}{dx^k}$. Megállapodunk abban is, hogy a 0-rendű derivált magát az eredeti $f$ függvényt jelenti. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *$k$-szor folytonosan differenciálható egy $I$ intervallumon*, ha az $f^{(k)}$ deriváltfüggvény létezik és folytonos $I$-n.

Az előző szakasz eredményeiből most már könnyen levezethető a lokális szélsőértékek létezésének egy újabb, elegendő feltétele.

**7-27. Tétel:** Tegyük fel, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében és

$$f'(x_0) = 0, \qquad \text{de} \qquad f''(x_0) \neq 0.$$

Akkor $f$-nek $x_0$-ban lokális szélsőértéke van, mégpedig lokális minimuma, ha $f''(x_0) > 0$, ill. lokális maximuma, ha $f''(x_0) < 0$.

**Bizonyítás:**

Mivel $f''$ folytonos $x_0$-ban és $f''(x_0) \neq 0$, azért $f''$-nak egy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ alakú környezetére is igaz, hogy ott $f'' \neq 0$ (valamilyen $\delta > 0$ szám mellett). Legyen itt pl. $f'' > 0$. Ekkor $f'$ monoton nő ebben az intervallumban (7-24. Állítás). Mivel pedig $f'(x_0) = 0$, ezért $f' \leq 0$ az $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumban és $f' \geq 0$ az $(x_0, x_0 + \delta)$

intervallumban, azaz $f'$ előjelet vált $x_0$-ban. Így $f$-nek valóban lokális minimuma van $x_0$-ban (7-25. Következmény). A lokális maximumra vonatkozó állítás ugyanígy látható be. □

Az eddigiek alapján az egyváltozós valós függvények lokális szélsőértékhelyeinek meghatározása az alábbi algoritmussal történhet. Legyen az $f$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, és kétszer folytonosan differenciálható az $(a,b)$ intervallumon.

- 1. lépés: Kiszámítjuk $f$ deriváltfüggvényét.
- 2. lépés: Meghatározzuk a deriváltfüggvény zérushelyeit. Ezek a lehetséges szélsőértékhelyek (az ún. *stacionárius pontok*).
- 3. lépés: Minden stacionárius pontban kiszámítjuk az $f$ függvény másodrendű deriváltját. Ha ez pozitív (negatív), akkor a függvénynek itt lokális minimuma (maximuma) van.

Ha egy stacionárius pontban a másodrendű derivált zérus, akkor eddigi eszközeinkkel nem tudjuk eldönteni, hogy van-e itt lokális szélsőérték, és ha igen, milyen típusú. Ez (a legtöbb esetben) a még magasabb rendű deriváltak vizsgálatával határozható meg. Ennek részleteivel azonban nem foglalkozunk, mert a gyakorlati esetek túlnyomó többségében az eddigi tételek használata elegendő.

Hangsúlyozzuk, hogy ez az algoritmus a *lokális* szélsőértékhelyek feltérképezésére alkalmas, és csak *kétszer folytonosan differenciálható* függvények esetén működik jól. Az algoritmus nem alkalmas sem olyan lokális szélsőértékek megkeresésére, ahol a függvény nem differenciálható, sem pedig az *abszolút szélsőértékhelyek* megkeresésére, ha azok az értelmezési tartomány valamelyik végpontjában helyezkednek el.

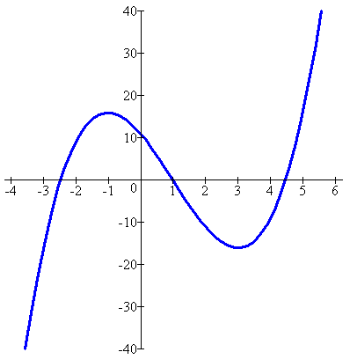
Az algoritmust ezért néha célszerű kiegészíteni az alábbi lépéssel:

- 4. lépés: Kiszámítjuk az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékeket, és ellenőrizzük, hogy ezek szélsőértékhelyek-e, azaz az itt felvett valamelyik függvényérték kisebb-e az előzőekben meghatározott lokális minimumértékek legkisebbikénél is, ill. nagyobb-e a a lokális maximumértékek legnagyobbikánál is.

Ez a lépés értelemszerűen elmarad, ha pl. $f$ egy nyílt intervallumon vagy az egész $\mathbf{R}$-en értelmezett, vagy ha a szélsőértékfeladat tartalmából előre tudjuk, hogy az értelmezési tartomány határán nem lehet szélsőérték, ill. annak nincs gyakorlati jelentése.

**7-11. Példa:** Hol vannak lokális szélsőértékhelyei az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ függvénynek?

*Megoldás*. A függvény nyilván (akárhányszor) deriválható, deriváltja: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Ennek zérushelyei: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Lokális szélsőérték tehát csak ezekben a pontokban lehet. A másodrendű derivált: $f''(x) = 6x - 6$, innen $f''(x_1) > 0$, és $f''(x_2) < 0$. Ezért az $x_1 = 3$ helyen a függvénynek lokális minimuma, az $x_2 = -1$ helyen pedig lokális maximuma van (ld. az ábrát).




28. ábra. Az $x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ harmadfokú függvény grafikonja

**7-12. Példa:** Folyóparti, 3200 $m^2$ területű téglalap alakú telket szeretnénk venni, az egyik oldal teljes egészében a parton halad. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, hogy a telek bekerítésének költsége (a parti oldal mentén nincs kerítés!) a lehető legkisebb legyen?

*Megoldás*. Jelölje $x$ a parti oldal hosszát, akkor rá merőleges oldal hossza $\frac{3200}{x}$. Így a kerítés összhossza $L(x) = x + \frac{6400}{x}$, és ezt kell minimalizálni $x$ függvényében. Az $L$ függvény a $(0, +\infty)$ intervallumban értelmezett. Deriváltja: $L'(x) = 1 - \frac{6400}{x^2}$, amelynek zérushelyei $x = 80$ és $x = -80$. Ez utóbbit eleve elvetjük, mert nem tartozik $L$ értelmezési tartományába (a telek oldalhosszúsága nem lehet negatív). Az $x = 80$ helyen pedig $L$-nek lokális minimuma van, mert itt a másodrendű derivált $L''(x) = \frac{2 \cdot 6400}{x^3}$. Ez a lokális minimumhely egyúttal *abszolút* minimumhely is, mert az értelmezési tartomány (azaz a $(0, +\infty)$ intervallum) bal végpontjában $\lim_{x\to+0} L(x) = +\infty$, és ugyanakkor $\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$ is teljesül. Az optimális alakú telek oldalhosszúságai tehát 80 és 40 m; a hosszabbik oldal halad a part mentén.

## 7.7. Newton–módszer nemlineáris egyenletek megoldására

Legyen az $f$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek, így Bolzano tétele értelmében $f$-nek biztosan van zérushelye az $(a,b)$ intervallumban.

Tekintsük tehát az

$$f(x) = 0$$

egyenletet. Ha $f$-et egy bonyolult képlet definiálja, akkor ennek egzakt megoldására általában nincs lehetőség. Közelítő megoldása azonban sokszor lehetséges. Egy ilyen közelítő megoldási módszer a *Newton-módszer*, amely (eltérően az algebrai egyenletek megoldóképleteitől) a megoldást nem véges számú művelet elvégzésével, hanem egy *konvergens sorozat határértékeként* állítja elő.

Tegyük fel, hogy $f$ differenciálható az $(a,b)$ intervallumon, és itt $f$-nek csak egy zérushelye van. Jelölje $x^*$ ezt a zérushelyet.

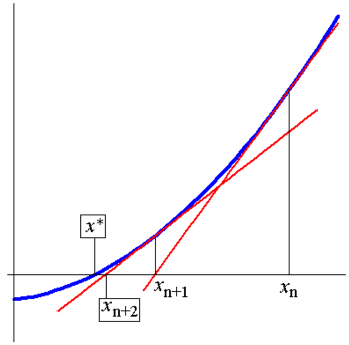
A Newton-módszer alapötlete, hogy ha már ismerjük az $x^*$ zérushelynek egy $x_n$ közelítését, akkor rendszerint jobb közelítéshez jutunk, ha $x_n$ körül az $f$ függvény grafikonját annak $x_n$-beli érintőjével helyettesítve, meghatározzuk az érintőegyenes zérushelyét. Az eljárást aztán tetszés szerinti lépésszámban megismételhetjük. Így, kiindulva valamilyen $x_1 \in (a,b)$ kezdeti közelítésből, egy $(x_n)$ sorozathoz jutunk, melyről azt várjuk, hogy (bizonyos feltételek teljesülése esetén) az $x^*$ megoldáshoz konvergál.

Mivel az $x_n$ pontbeli érintő egyenlete: $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$, az érintő zérushelye ott van, ahol $f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0$, azaz $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Jelölje $x_{n+1}$ ezt a számot, ez lesz tehát a megoldás új közelítése.

A következő iterációs sorozatot nyertük. Kiindulva egy $x_1 \in (a,b)$ kezdeti közelítésből, legyenek

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)}$$

Igazolható, hogy ha $f$-nek egyetlenegy zérushelye van $(a,b)$-ben, továbbá $f$ *kétszer* folytonosan deriválható az $[a,b]$ intervallumon és $f'(x^*) \neq 0$, akkor minden „elég jó” kezdeti $x_1 \in (a,b)$ közelítésből kiindulva, a fenti




29. ábra. A Newton-módszer működése

rekurzióval definiált sorozat az $x^*$ megoldáshoz tart. A konvergencia sebessége általában igen nagy, így elég csak néhány iterációs lépést végrehajtani ahhoz, hogy elfogadható pontosságú közelítést nyerjünk a megoldásra. Az „elég jó" kitétel azt jelenti, hogy létezik olyan (közelebbről sajnos csak nehezen meghatározható) $\delta > 0$ szám úgy, hogy minden, $x^*$-hoz $\delta$-nál közelebb eső kezdeti közelítés esetén a kapott iterációs sorozat biztosan $x^*$-hoz konvergál. Más kezdeti közelítés választása esetén előfordulhat, hogy az iteráció divergál, vagy a közelítések egy idő után kiesnek az $[a,b]$ intervallumból.

A szóban forgó eljárást az alábbi példán mutatjuk be.

**7-13. Példa:** Legyen $f(x) := x^2 - A$, ahol $A$ rögzített pozitív szám. Ekkor az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen (pozitív) megoldása: $x = \sqrt{A}$. Kiindulva egy tetszőleges $x_1 > 0$ kezdeti közelítésből (pl. $x_1 := A$ ), képezzük az alábbi iterációs sorozatot:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{A}{x_n} \right) \qquad (n = 1,2,...).$$

Az így definiált sorozatra $x_n \to \sqrt{A}$ teljesül (bizonyítsuk ezt be!). A konvergencia nagyon gyors, az értékes jegyek száma minden iterációs lépésben kb. megkétszereződik. A módszer érdekessége, hogy a $\sqrt{A}$ szám fenti közelítésére pusztán az alapműveleteket használja fel.
Konkrétan, legyen pl. $A := 2$. Kiindulva az $x_1 := 2$ kezdeti közelítésből, az iterációs sorozat első néhány tagja (4 tizedesjegy pontossággal): 2,0000; 1,5000; 1,4166; 1,4142; 1,4142; ... , és már a 3. iterált is 4 tizedesjegy pontossággal közelíti a pontos $\sqrt{2}$ megoldást.

A példa kézenfekvő módon általánosítható magasabb kitevőjű gyökök számítására is. Legyen $m \geq 2$ egész, és $f(x) := x^m - A$, ahol $A$ rögzített pozitív szám. Ekkor az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen (pozitív) megoldása $x = \sqrt[m]{A}$. Kiindulva egy tetszőleges $x_1 > 0$ kezdeti közelítésből (pl. $x_1 := A$), a Newton-módszer az

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^m - A}{m x_n^{m-1}} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot x_n + \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{x_n^{m-1}} \qquad (n = 1,2,...)$$

iterációs sorozatot szolgáltatja, amelyre $x_n \to \sqrt[m]{A}$ teljesül.

# 20. lecke

# Ellenőrző kérdések, feladatok

## 7.8. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** Az $x \to \operatorname{arctg}(\log x)$ formulával definiált leképezés deriváltja

☐ $\frac{1}{1+x^2} \cdot \log x$ ☐ $\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x}$ ☐ $\frac{1}{1+(\log x)^2}$ ☐ $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+(\log x)^2}$

**2.** A $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ határérték

☐ nem létezik
☐ a L'Hospital-szabály miatt 1
☐ 0
☐ a L'Hospital-szabály miatt $-1$

**3.** Az $x \to |\cos 2x|$ leképezés a $\frac{\pi}{4}$ helyen

☐ folytonos, és differenciálható
☐ folytonos, de nem differenciálható
☐ nem folytonos, de differenciálható
☐ nem folytonos, és nem differenciálható

**4.** Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvénynek az $x_0$ pontban lokális maximuma van, akkor szükségképp

☐ $f'(x_0) > 0$ ☐ $f'(x_0) < 0$ ☐ $f'(x_0) = 0$ ☐ $f''(x_0) = 0$

**5.** Az $x \to f(x)$ leképezésnek a 0-ban biztosan lokális maximuma van, ha

☐ $f'(0) = 0,\ f''(0) < 0$ ☐ $f'(0) = 0,\ f''(0) > 0$ ☐ $f'(0) < 0,\ f''(0) = 0$ ☐ $f'(0) > 0,\ f''(0) = 0$

**6.** Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés deriválható az $x$ helyen, ha az alábbi határérték létezik:

☐ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)-f(h)}{h}$ ☐ $\lim\limits_{h\to x} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ☐ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{x}$ ☐ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

**7.** Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható leképezésre teljesül, hogy $f'(0) = 0$, és $f''(0) = 1$, akkor $f$-nek $0$-ban

☐ lokális minimuma van
☐ lokális maximuma van
☐ nincs lokális szélsőértéke
☐ zérushelye van

**8.** Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényre $f(1) = -1$, és $f(2) = 3$ teljesül, akkor a Lagrange-középértéktétel miatt van olyan $1 \leq x \leq 2$ szám, melyre

☐ $f'(x) = 0$ ☐ $f'(x) = -1$ ☐ $f'(x) = 3$ ☐ $f'(x) = 4$

**9.** Az $x \to \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ leképezés deriváltja egy $x > 0$ helyen

☐ $-\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$ ☐ $\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $\dfrac{1}{1-x^2}$

**10.** Az $x \to \log(2e^{-3x^2})$ leképezésnek a $0$ helyen vett deriváltja

☐ $-6$ ☐ $-\dfrac{2}{3}$ ☐ $0$ ☐ $-3$

**11.** Ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény deriváltja azonosan $0$, akkor szükségképp

☐ $f$ is azonosan $0$
☐ $f$ konstans függvény
☐ $f$-nek biztosan van legalább egy zérushelye

☐ $f$-nek biztosan van legalább egy fixpontja

**12.** Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényre teljesül, hogy $f'(0) \cdot f''(0) = 1$, akkor

- ☐ $f$-nek 0-ban lokális maximuma van
- ☐ $f$-nek 0-ban lokális minimuma van
- ☐ $f$-nek 0-ban nincs lokális szélsőértéke
- ☐ $f$-nek 0-ban szakadása van

**13.** A Lagrange-középértéktétel szerint, ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható, $f(0) = 0$, és $f(1) = 1$, akkor van olyan $0 < t < 1$, melyre

☐ $f(t) = 0$ ☐ $f(t) = 1$ ☐ $f'(t) = 0$ ☐ $f'(t) = 1$

**14.** Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvény a $(-1, 1)$ intervallumon biztosan monoton fogy, ha itt

☐ $f' \geq 0$ ☐ $f' \leq 0$ ☐ $f'' \geq 0$ ☐ $f'' \leq 0$

**15.** Rolle tétele szerint, ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható, $f(0) = 1$, és $f(1) = 1$, akkor van olyan $0 < t < 1$, melyre

☐ $f(t) = 0$ ☐ $f(t) = 1$ ☐ $f'(t) = 0$ ☐ $f'(t) = 1$

End Quiz

Score:

## 7.9. Feladatok

7-1. Feladat: Határozzuk meg a következő formulákkal definiált függvények deriváltját:

(*a*)

$$f(x) := \frac{\sin x^2}{\cos^2 x}$$

(*b*)

$$f(x) := e^{e^{\sqrt{1+x^2}}}$$

(*c*)

$$f(x) := (1 + (ax)^y)^{1/y}$$

(ahol $y > 0$ adott paraméter)

(*d*)

$$f(x) := \operatorname{arctg}\sqrt{1+e^x}$$

(*e*)

$$f(x) := \log(\sin^2 x^3)$$

(*f*)

$$x^2 + (f(x))^3 = x \cdot f(x) + 1$$

az $x = 0$ helyen (implicit függvény).

Megoldás: itt

**7-2. Feladat:** Mi az alábbi kifejezések határértéke $x \to 0$ esetén?

$(a)$

$$\frac{\log\sqrt{1+x^2}}{\sin^2 x},$$

$(b)$

$$\frac{\log(1+x^4)}{\log(1-x^4)},$$

$(c)$

$$\frac{\sin^3 x}{x-\sin x},$$

$(d)$

$$\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-5x}}{\sin x},$$

$(e)$

$$\frac{e^{2x^2}-e^{3x^2}}{x^2}.$$

**Megoldás:** itt

**7-3. Feladat:** Legyenek $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvények. Igazoljuk az elaszticitásra vonatkozó alábbi összefüggéseket:

$(a)$

$$E(f+g)(x) = \frac{f(x) \cdot Ef(x) + g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) + g(x)},$$

$(b)$

$$E(fg)(x) = Ef(x) + Eg(x).$$

Megoldás: itt

**7-4. Feladat:** Részlet a Magazine for the Stupid 2005.április 1-i számából.
"Szenzációs hír járta be a minap a tudományos világot. Egy ifjú tudós, Bob Butthead szellemesen elegáns ellenpéldát konstruált a régóta igaznak hitt ún. 'L'Hospital-szabályra'. 'Nem értem ezeket a régivágású matematikusokat - nyilatkozta lapunknak Bob -, az ellenpélda olyan egyszerű, hogy egy átlagos elsőéves hallgató is azonnal megérti, minden komolyabb előképzettség és tudományos fokozat nélkül. Tanult kollégáimnak régesrég rá kellett volna jönniük, hogy e tétel körül valami nem stimmel. Úgy látszik, a kritikátlan tekintélyelv ebben az egzaktnak hitt tudományban is kezd elharapózni.'
Lapunknak sikerült megszerezni az elhíresült ellenpéldát.
*Feladat*: Számítsuk ki a $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{-2x}+1}$ határértéket!
Egyrészt nyilván:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{-2x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}(e^{x}-e^{-x})}{e^{-x}(e^{-x}+e^{x})} = \lim_{x\to 0} (e^{2x} \cdot \operatorname{th} x) = 0.$$

Másrészt a L'Hospital-szabály szerint:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{-2x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{-2e^{-2x}} = -1,$$

és ez ellentmond az előző eredménynek.
Az interjúra reagálva Dr. O. K. Clever, a linkostown-i egyetem professzora kijelentette: 'Bob? Az egy ökör. Már sajnálom, hogy nem rúgtam ki, amikor analízisből vizsgázott nálam.'"
Kinek volt igaza és miért?

Megoldás: itt

7-5. Feladat: Csingacsguk delavár főnök nősül, ezért új sátrat (egyenes körkúp) kell készítenie. Összegyűjt 10 $m^2$-nyi anyagot, és konzultál a delavárok nagy varázslójával, hogyan kell ebből a lehető legnagyobb térfogatú sátrat csinálni. Miután sikeresen elkészül, ünnepélyes sátoravatóra hívja legjobb barátját, Sólyomszemet. Sólyomszem 183 cm magas. Ki tud-e egyenesedni a sátorban?

Megoldás: itt

---

7-6. Feladat: Három vadnyugati városka, Gunville, Deathtown és Cowboy City (a továbbiakban G, D, C) összefognak, és közös erővel közös kocsmát akarnak nyitni a prérin, valahol a három városka által meghatározott háromszög belsejében. A kocsmához mindegyik városból utat is építenek. Hol legyen az ivó, hogy a beruházás összköltsége minimális legyen? Távolságok: G és D közt 10 mérföld, G és C valamint D és C közt egyaránt 20 mérföld. (Az utak építési költsége egyenesen arányos a hosszukkal.)

Megoldás: itt

---

7-7. Feladat: Micimackó mézesbödönje elveszett. Róbert Gida szerez 4 $dm^2$-nyi bádoglemezt, és nekiáll, hogy ebből új bödönt (hengert fenékkel, fedőlap nélkül) készítsen. De aztán jó nagy legyen! - kéri Micimackó. Nyugodt lehetsz - válaszolja Róbert Gida - a lehető legnagyobbat fogom megcsinálni. Literes lesz vajon? kérdi Micimackó mohón.
Mit válaszolhatott Róbert Gida, és miért?
(A kiszabási veszteségtől eltekintünk: feltesszük, hogy Róbert Gida olyan apró darabokból rakta össze a bödönt, hogy nincs hulladék.)

Megoldás: itt

---

7-8. Feladat: Furkó Ferkó kft-jével új vállalkozásba kezd: konzervdobozokat gyárt. Fél literes (zárható henger alakú) konzervdobozok hatalmas mennyiségét kell leszállítania. De mégis, mekkorák legyenek? - kérdi a műszaki igazgató. - Most mondtam, fél literesek! - Figyelj már, te fafejű. Ha túl laposak, akkor azért kell hozzá sok anyag. Ha túl magasak, akkor meg azért. Ha rosszul választod meg az arányokat, ingedgatyád rámegy az anyagköltségre! Ferkónak azóta nincs egy nyugodt perce. Segítsünk neki! Mi az átmérő és a magasság aránya az optimális alakú doboz esetén?

Megoldás: itt

---

7-9. Feladat: Tervezzünk egy körhenger alakú, alul és felül egyaránt zárt 1 $m^3$-es víztartályt a lehető legkevesebb felületű lemez felhasználásával!

Megoldás: itt

---

7-10. Feladat: A törpék egy hatalmas díszdobozzal akarják meglepni Hófehérkét a születésnapján. Aranyszalagjuk már van, mellyel majd két oldalán átkötik a dobozt. A szalag hossza épp 3 m, amit Kuka hebehurgya módon már elvágott egy 1 és egy 2 méteres darabra. Mekkorák legyenek a doboz méretei, hogy térfogata maximális legyen?

Megoldás: itt

---

**7-11. Feladat:** Épül a Kamatláb Bank Rt. legújabb, kacsalábon forgó palotája. A kacsaláb tartószerkezeténél tartanak éppen, amikor elfogy a gerenda. Kerítenek egy szép, egészséges, pontosan félkör keresztmetszetű 20 cm sugarú rönköt. Hogyan kell ebből kifaragni a legerősebb gerendát? (A gerenda téglalap keresztmetszetű, és annál erősebb, minél nagyobb a keresztmetszetének területe.)

Megoldás: itt

---

**7-12. Feladat:** Gazdagné Zsugory Eufrozina legújabb ötlete, hogy egy négyzet alapú, 32 köbméteres (egyenletes mélységű) medencét építtet a kertjébe. A medence oldalfalait és alját méregdrága csempével akarja burkoltatni, amikor rádöbben, hogy fogytán a pénze. Tervéről nem mond le, de szeretné a lehető legkevesebb csempéből megúszni a burkolást. Hogyan kell ehhez méretezni a medencét?

Megoldás: itt

---

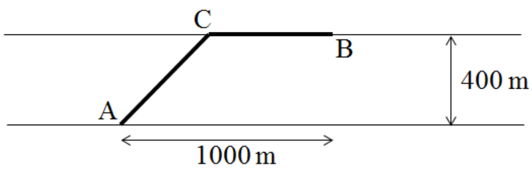
**7-13. Feladat:** Restaurálják a Szent Kleofás neoromán kápolnát. A kápolnaablakot (téglalap, felső felén egy félkörrel kiegészítve) teljesen újjá kell építeni. Korabeli krónikákból ismert, hogy az ablak felülete épp 3 $m^2$, és teljes kerülete aranyszegélyes. A szponzor azonban csak akkor hajlandó finanszírozni a munkálatokat, ha ez a kerület legfeljebb 7 méter. Lehet-e ennek megfelelően méretezni az ablakot? Ha igen, hogyan?

Megoldás: itt

---

**7-14. Feladat:** A bergengóciai Styx folyó két partján levő A és B pontok közt kábelt kell lefektetni. A kábelfektetés költsége szárazföldön 100 peták méterenként, a folyó alatt 200 peták méterenként. Hogyan vezessük a kábelt, hogy a beruházás költsége minimális legyen?

**Megoldás:** itt




30. ábra. Kábelfektetési probléma vázlata

**7-15. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg}(x^2)$ formulával definiált függvény deriváltját.

**Megoldás:** itt

**7-16. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \dfrac{1}{\cos(e \cdot \pi)}$ formulával definiált függvény deriváltját.

**Megoldás:** itt

**7-17. Feladat:** Határozzuk meg, mely pontokban metszi az $f(x) := \dfrac{x-4}{x+1}$ formulával értelmezett függvény grafikonja a tengelyeket, és írjuk fel ezekben a pontokban az érintő egyenletét.

Megoldás: itt

---

**7-18. Feladat:** Mekkorának kell választani egy $20$ cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

Megoldás: itt

---

**7-19. Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\log(x-2)}{x^2-9}$ határértéket, ha az létezik.

Megoldás: itt

---

**7-20. Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$ határértéket, ha az létezik.

Megoldás: itt

---

**7-21. Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$ határértéket, ha az létezik.

Megoldás: itt

**7-22. Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ határértéket, ha az létezik.

**Megoldás:** itt

7-1 **Megoldás:**

$(a)$

$$f'(x) = \frac{(\cos x^2)\cdot 2x\cos^2 x + (\sin x^2)\cdot 2\cos x \sin x}{\cos^4 x} =$$
$$= 2\frac{(\cos x^2)\cdot x\cos x + (\sin x^2)\cdot \sin x}{\cos^3 x}.$$

$(b)$

$$f'(x) = e^{e^{\sqrt{1+x^2}}}\cdot e^{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x.$$

$(c)$

$$f'(x) = \frac{1}{y}(1+(ax)^y)^{\frac{1}{y}-1}\cdot y(ax)^{y-1}\cdot a = a^y\cdot(1+(ax)^y)^{\frac{1-y}{y}}\cdot x^{y-1}.$$

$(d)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{(2+e^x)\sqrt{1+e^x}}.$$

$(e)$

$$f'(x) = \frac{2\sin x^3\cos x^3\cdot 3x^2}{\sin^2 x^3} = \frac{6x^2\cdot\cos x^3}{\sin x^3}.$$

$(f)$

$$2x + 3f(x)^2 f'(x) = f(x) + x\cdot f'(x), \qquad \text{innen} \quad f'(x) = \frac{f(x)-2x}{3f(x)^2 - x}.$$

Az $x=0$ helyen nyilván $f(x)=1$, ezért tehát $f'(0)=\frac{1}{3}$.

**7-2 Megoldás:**

($a$) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{1+x^2}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sin x\cos x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\cdot\cos x}=\frac{1}{2}.$$

($b$) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^4)}{\log(1-x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x^3}{1+x^4}}{\frac{-4x^3}{1-x^4}}=-1.$$

($c$) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x\cos x}{1-\cos x}=\left(\lim_{x\to 0}3\cos x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\right).$$

A jobb oldal első tényezője 3, második tényezőjében a L'Hospital-szabály ismét alkalmazható.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x-\sin x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=6.$$

($d$) A L'Hospital-szabály alkalmazható, de a feladat enélkül is megoldható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-5x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1+5x}{(\sin x)\cdot(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-5x})}=$$
$$=7\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cdot\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-5x}}=\frac{7}{2}.$$

($e$) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-e^{3x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4xe^{2x^2}-6xe^{3x^2}}{2x}=-1.$$

**7-3 Megoldás:**

$(a)$

$$E(f+g)(x) = \frac{x}{f(x)+g(x)} \cdot (f'(x)+g'(x)) =$$

$$= \frac{x}{f(x)+g(x)} \cdot \left( \frac{f(x)f'(x)}{f(x)} + \frac{g(x)g'(x}{g(x)}) \right) = \frac{f(x)\cdot Ef(x) + g(x)\cdot Eg(x)}{f(x)+g(x)}$$

$(b)$

$$E(fg)(x) = \frac{x}{f(x)g(x)} \cdot (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) =$$

$$= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) + \frac{x}{g(x)} \cdot g'(x) = Ef(x) + Eg(x).$$

**7-4 Megoldás:**

Clever professzornak volt igaza. Az „ellenpéldában” ui. a L'Hospital-szabály *nem* alkalmazható (a nevező nem zérus az $x = 0$ helyen; ettől az apróságtól eltekintve minden részletszámítás helyes). Feladatunk erre a – sajnos gyakran elkövetett – hibára hívja fel a figyelmet.

**7-5 Megoldás:**

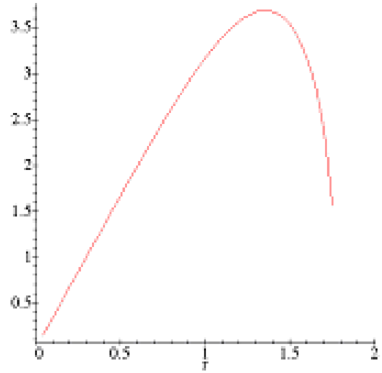
Legyen $r$ a sátor alapkörének sugara, $a$ a kúp alkotója és $m$ a magassága. Akkor Pitagorász tétele miatt $m = \sqrt{a^2 - r^2}$. A sátor palástja egy $a$ sugarú körcikké teríthető ki, ívhossza megegyezik a sátor alapkörének kerületével ($2r\pi$), így a palást felszíne $F = \frac{1}{2}a \cdot 2r\pi$ ($= 10$ m$^2$), ahonnan $a = \frac{F}{r\pi}$. Így a sátor térfogata kifejezhető pusztán $r$ függvényében:

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{F^2}{r^2\pi^2} - r^2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{F^2r^2}{\pi^2} - r^6},$$

és ezt kell maximalizálni, ahol $r > 0$ (valójában $r$ csak egy véges intervallumban változhat, $0 \leq r \leq \sqrt[4]{\frac{F^2}{\pi^2}}$). Vegyük észre, hogy elég a gyök alatti mennyiséget maximalizálni, mert annak (a gyökfüggvény monoton növő volta miatt) szükségképp ugyanott van maximumhelye, mint $V$-nek. Jelölje tehát $f(r) := \frac{F^2r^2}{\pi^2} - r^6$. Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $f'(r) := \frac{2rF^2}{\pi^2} - 6r^5$. A zérushelyre több lehetséges érték is adódik, de ezek közül csak egy pozitív: $r_1 = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3\pi^2}}$. Itt $f$-nek valóban lokális maximuma van, mert:

$$f''(r_1) = \frac{2F^2}{\pi^2} - 30r_1^4 = \frac{2F^2}{\pi^2} - 30 \cdot \frac{F^2}{3\pi^2} < 0.$$

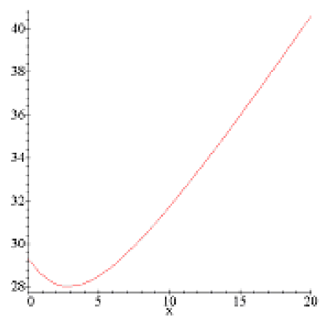
Itt a $V$ függvénynek *abszolút* maximuma is van, mert nyilván $V(0) = 0$ és $V(\sqrt[4]{\frac{F^2}{\pi^2}}) = 0$. A maximális térfogatú sátor alapkörének sugara tehát $r_1 = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3\pi^2}} \approx 1.35$ m. Alkotója $a_= \frac{F}{r_1\pi} \approx 2.35$ m, így a sátor magassága: $m = \sqrt{a^2 - r_1^2} \approx 1.92$ m. Vagyis Sólyomszem nyugodtan kiegyenesedhet a sátorban (igaz, csak középtájékon).




31. ábra. A $V$ függvény grafikonja az 5. feladatban

**7-6 Megoldás:**

A GDC háromszög egyenlő szárú. Elemi geometriai megfontolásokkal adódik, hogy a keresett tulajdonságú pont (melynek a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege minimális) csakis a háromszög szimmetriatengelyén lehet. (Ha ui. nem ott lenne, akkor a szimmetriatengelyen található lenne olyan pont, amelyre vonatkozó távolságösszeg határozottan kisebb: vajon hol?) Tekintsünk tehát a szimmetriatengelyen egy tetszőleges pontot, jelölje $x$ ennek távolságát a GD oldaltól. Akkor, Pitagorász tételét használva, a pont távolsága a G és D pontoktól egyaránt $\sqrt{25+x^2}$ mérföld, a C ponttól pedig $\sqrt{400-25}-x=\sqrt{375}-x$ mérföld. A csúcspontoktól mért távolságösszeg tehát $f(x):=2\sqrt{25+x^2}+\sqrt{375}-x$ mérföld, és ezt kell minimalizálni (ahol $x$ zérus és $\sqrt{375}$ közt változhat). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált, zérus, azaz $f'(x)=2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{25+x^2}}-1=0$. Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van: $x_1=\sqrt{\frac{25}{3}}\approx 2.89$ mérföld. Itt $f$-nek valóban minimuma van, mert $f''(x_1)=\frac{50}{(25+x_1^2)^{3/2}}>0$. A kocsma megépítésére az optimális hely tehát a GDC háromszög szimmetriatengelyén, a GD oldaltól kb. 2.89 mérföld távolságra van C irányában. Könnyen ellenőrizhető az is, hogy a lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az $f$ függvény az értelmezési tartomány perempontjaiban (0 és $\sqrt{375}$), nagyobb értéket vesz fel, mint $x_1$-ben.



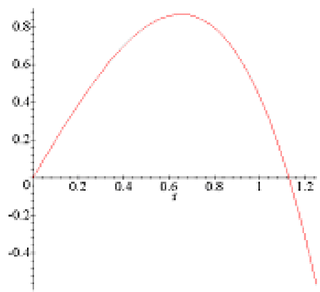

32. ábra. Az $f$ függvény grafikonja az 6. feladatban

7-7 **Megoldás:**

Jelölje $r$ a henger alapkörének sugarát, akkor a bödön felszíne $F = r^2\pi + 2r\pi m = 4\text{dm}^3$. Innen $m = \frac{F-r^2\pi}{2r\pi}$. A bödön térfogata tehát kifejezhető csak az $r$ sugár függvényében:

$$V(r) = r^2\pi \cdot \frac{F - r^2\pi}{2r\pi} = \frac{Fr - r^3\pi}{2},$$

és ezt kell maximalizálni ($0 \leq r \leq \sqrt{\frac{F}{\pi}}$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált, zérus, azaz $v'(r) = \frac{F-3r^2\pi}{2} = 0$ . Pozitív zérushely egyetlenegy van: $r_1 = \sqrt{\frac{F}{3\pi}} \approx 0.65$ dm. Itt $V$-nek valóban maximuma van, mert $V''(r_1) = \frac{-6r_1\pi}{2} < 0$. A maximális térfogat ezért $V_{\max} = V(r_1) = \frac{Fr_1 - r_1^3\pi}{2} \approx 0.87\ \text{dm}^3$. A lokális maximum egyúttal abszolút maximum is, mert az értelmezési tartomány perempontjaiban a $V$ függvény zérus értéket vesz fel. Tehát szegény Micimackó vágya, a literes bödön, így nem teljesíthető. Megjegyezzük azonban, hogy ha Róbert Gida félgömb alakú „bödönt” készít a 4 dm$^2$ bádogból, akkor annak térfogata valamivel még nagyobb is 1 liternél (ellenőrizzük!).




33. ábra. A $V$ függvény grafikonja az 7. feladatban

7-8 **Megoldás:**

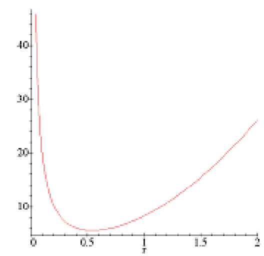
Jelölje $r$ a henger alapkörének sugarát, akkor a konzervdoboz térfogata $V = r^2\pi m$ (= 0,5 liter), ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi}$. Mivel a konzervdoboz teljes felszíne $F = 2r^2\pi + 2r\pi m$, azért $F$ kifejezhető csak az $r$ sugár függvényében:

$$F(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r},$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $F'(r) = 4r\pi - \frac{2V}{r^2} = 0$, innen a zérushelyre egyetlen érték adódik: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ dm. Itt $F$-nek valóban lokális minimuma van, mert $F''(r_1) = 4\pi + \frac{4V}{r_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az $F$ függvény határértéke mind a $0$-ban, mind a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális felszínhez tartozó magasság:

$$m = \frac{V}{r_1^2\pi} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} \cdot \frac{V}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r_1.$$

Így az optimális alakú doboz esetében az átmérő épp a magassággal egyezik (a térfogattól függetlenül).



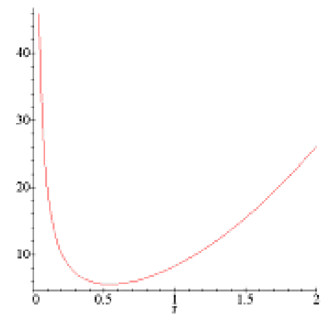

34. ábra. Az $F$ függvény grafikonja az 8. feladatban

7-9 **Megoldás:**

Jelölje $r$ a henger alapkörének sugarát, akkor a tartály térfogata $V = r^2\pi m$ $(= 1\ \text{m}^3)$, ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi}$. Mivel a tartály teljes felszíne $F = 2r^2\pi + 2r\pi m$, azért $F$ kifejezhető csak az $r$ sugár függvényében:

$$F(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r},$$

és ezt kell minimalizálni $(r > 0)$. Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $F'(r) = 4r\pi - \frac{2V}{r^2} = 0$, innen a zérushelyre egyetlen érték adódik: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx$ 0,54 m. Itt $F$-nek valóban lokális minimuma van, mert $F''(r_1) = 4\pi + \frac{4V}{r_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az $F$ függvény határértéke mind a 0-ban, mind a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális felszínű tartály átmérője tehát $2r_1 \approx 1.08$ m, magassága pedig $m = \frac{V}{r_1^2\pi} \approx 1.08$ m (*pontosan* egyezik az átmérővel).




35. ábra. Az $F$ függvény grafikonja a 9. feladatban

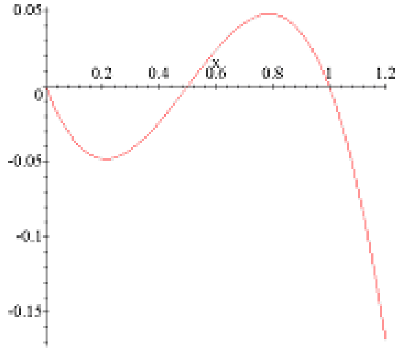
7-10 **Megoldás:**

Legyenek a doboz élei $x$, $y$, $z$, akkor az átkötések adott hossza miatt $2x + 2y = 2$ és $2y + 2z = 1$ kell, hogy teljesüljön. Innen $y$ és $z$ is kifejezhető $x$ függvényében: $y = 0 - x$, és $z = \frac{1}{2} - y = -\frac{1}{2} + x$. A térfogat tehát

$$V(x) = x(1-x)\left(-\frac{1}{2} + x\right) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

és ezt kell maximalizálni, (ahol $x$ nyilván legfeljebb a $[0,2]$ intervallumot futhatja be). Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $V'(x) = -3x^2 + 3x - \frac{1}{2}$. Innen a szóbajöhető értékek: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Az ezeknek megfelelő $y$ és $z$ értékek: $y_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, és $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{6}$. Világos, hogy a 2-es indexű értékek nem jöhetnek számításba. Ha van tehát lokális maximum, akkor az csakis az $x = x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ érték mellett lehet. Itt pedig valóban lokális maximum van, mert $V''(x) = -6x + 3$, így $V''(x_1) = -3 - \sqrt{3} + 3 < 0$. A lokális maximum egyúttal abszolút maximum is, mert az értelmezési tartomány perempontjaiban a $V$ függvény zérus, ill. negatív értéket vesz fel. A legnagyobb térfogatú doboz méretei tehát: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 79$ cm, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 21$ cm, és $\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 29$ cm.

Megjegyezzük még, hogyha Kuka nem vágta el volna a szalagot, akkor a legnagyobb térfogatú doboz kocka alakú lenne, melynek egy oldala $\frac{3}{8} = 0.375$ méter; ennek térfogata alig nagyobb az előzőekben méretezett doboz térfogatánál.




36. ábra. A $V$ függvény grafikonja a 10. feladatban

7-11 **Megoldás:**

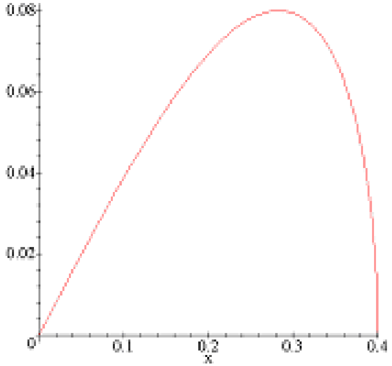
A legnagyobb keresztmetszet nyilván úgy érhető el, hogy a keresztmetszeti téglalap egyik oldalával a félkör átmérőjére illeszkedik, ezzel párhuzamos oldalának csúcsai pedig a félkörvonalon vannak. Jelölje $x$ a téglalapnak a félkör átmérőjére illeszkedő oldalát, akkor a másik oldalának hossza Pitagorász tétele értelmében $\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ (ahol $R$ a félkör sugara (= 20 cm)). Így a téglalap $T$ területe kifejezhető $x$ függvényében:

$$T(x) = 2x\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$$

és ezt kell maximalizálni ( $0 \leq x \leq 2R$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $T'(x) = \frac{R^2x - 4x^3}{2\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = 0$. A deriváltfüggvénynek tehát 3 zérushelye van, de ezek közül csak egy pozitív: $x_1 = R\sqrt{2} \approx 28$ cm. Könnyen látható, hogy $x_1$-ben a deriváltfüggvény előjelet is vált, éspedig pozitívból negatívba, így $x_1$-ben $T$-nek valóban lokális maximuma van. A lokális maximum egyúttal abszolút maximum is, mert az értelmezési tartomány perempontjaiban a $T$ függvény zérus értéket vesz fel. A téglalap másik oldalának hossza:

$$\sqrt{R_2 - \left(\frac{x_1}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 14 \text{ cm}$$

(pontosan feleakkora, mint a hosszabbik oldal). A feladat egyébként differenciálszámítás nélkül, elemi geometriai eszközökkel is megoldható (hogyan?)



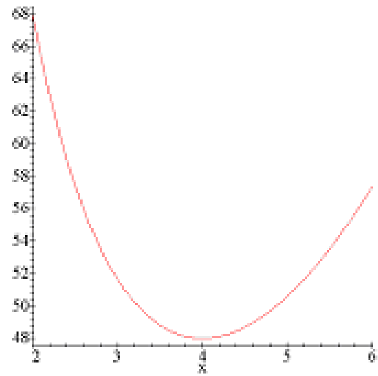

37. ábra. A $T$ függvény grafikonja az 11. feladatban

7-12 **Megoldás:**

Jelölje $x$ a medence oldalhosszúságát, $m$ a mélységét, akkor $V = x^2 m$ (= 32 m$^2$). Innen $m$ kifejezhető: $m = \frac{V}{x^2}$, a burkolandó felület pedig felírható $x$ függvényében:

$$F(x) = x^2 + 4xm = x^2 + \frac{4V}{x},$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált, zérus, azaz $F'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2} = 0$, innen a zérushelyre egyetlen érték adódik: $x_1 = \sqrt[3]{2V} = 4$ m. Itt $F$-nek valóban lokális minimuma van, mert $F''(x_1) = 2 + \frac{8V}{x_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az $F$ függvény határértéke mind a $0$-ban, mind pedig a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális felülethez tartozó oldalhosszúság és mélység tehát 4 m és 2 m.



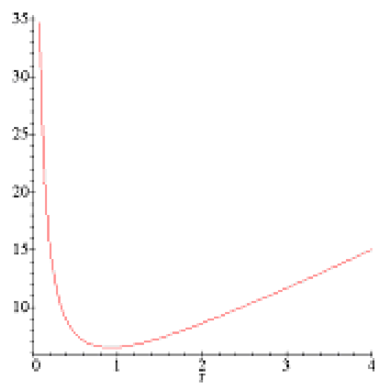

38. ábra. Az $F$ függvény grafikonja a 12. feladatban

7-13 **Megoldás:**

Jelölje $r$ a félkör sugarát, akkor a téglalap ehhez illeszkedő oldalának hossza $2r$. Legyen a másik oldal hossza $a$, akkor az ablak felülete: $F = 2ar + \frac{1}{2}r^2\pi$ (= 3 m$^2$). Innen $a$ kifejezhető: $a = \frac{F}{2r} - \frac{r\pi}{4}$. Így az ablak kerülete felírható csak az $r$ sugár függvényében:

$$K(r) = 2a + 2r + r\pi = \frac{F}{r} - \frac{r\pi}{2} + 2r + 2\pi = \frac{F}{r} + \frac{r\pi}{2} + 2r,$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$ ). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $K'(r) = -\frac{F}{r^2} + \frac{\pi}{2} + 2 = 0$. Pozitív zérushelye a deriváltfüggvénynek csak egy van: $r_1 = \sqrt{\frac{F}{\frac{\pi}{2}+2}} \approx 0.92$ m. Itt valóban lokális minimum van, mert $K''(r_1) = \frac{2F}{r_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert a $K$ függvény határértéke mind a $0$-ban, mind pedig a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális kerület: $K_{\min} = \frac{F}{r_1} + \frac{r_1\pi}{2} + 2r_1 \approx 6{,}55$ m, így tehát a szponzor még épp finanszírozza a munkálatokat.




39. ábra. A $K$ függvény grafikonja az 13. feladatban

**7-14 Megoldás:**

A kérdés a C pont optimális megválasztása. Jelölje $x$ az A és C pontok vízszintes (folyásirányú) távolságát, akkor a folyóban $\sqrt{x^2+400^2}$ méter, a szárazföldön $1000-x$ méter kábelt kell fektetni. A költség tehát petákban kifejezve:

$$f(x) = 200\sqrt{x^2+400^2} + 100\cdot(1000-x) = 100\cdot\left(2\sqrt{x^2+400^2}+1000-x\right),$$

és ezt kell minimalizálni ($0 \le x \le 1000$ ). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz

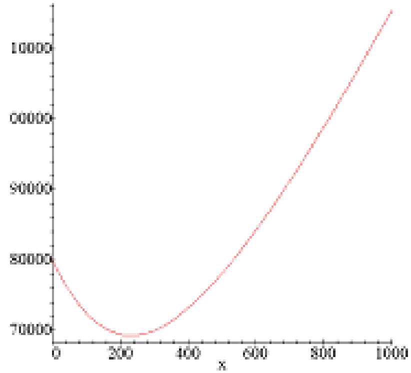
$$f'(x) = 100\cdot\left(2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+400^2}} - 1\right) = 0.$$

A $(0{,}1000)$ intervallumban a deriváltnak egyetlen zérushelye van, éspedig $x_1 = \frac{400}{\sqrt{3}} \approx 230{,}9$ m. Itt pedig valóban lokális minimum van, mert

$$f''(x) = 200\cdot\frac{400^2}{(x_1^2+400^2)^{3/2}} > 0.$$

A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az $f$ függvény az értelmezési tartomány perempontjaiban nagyobb értéket vesz fel, mint az $x_1$ helyen. Optimális esetben tehát $\sqrt{x_1^2+400^2} \approx 461.9$ méter kábelt kell víz alatt, $1000-x_1 \approx 769.1$ métert pedig szárazföldön lefektetni.

Megjegyezzük, hogy az optimális C pont helyzete független B helyzetétől *mindaddig, amíg B az A ponttól vízszintesen mérve, $x_1$-nél távolabb van*. Ellenkező esetben a költségfüggvény $x$-nek monoton fogyó függvénye, a szélsőértékhely az értelmezési tartomány határán lesz, így nem kapható meg a mutatott differenciálszámítási eszközökkel. Egyébként ekkor az optimális stratégia az, hogy a kábelt teljes egészében a vízen keresztül fektetjük.




40. ábra. Az $f$ függvény grafikonja a 14. feladatban

Megjegyezzük még, hogy a megoldás során hallgatólagosan feltettük, hogy a Styx vize sekély, azaz a vízen át fektetett kábel hossza épp az AC szakasz hosszával egyenlő. Valójában a kábel hossza ennél több. Ha ezt is figyelembe akarjuk venni, a feladat sokkal nehezebbé válik (általános medergeometria esetén eddigi eszközeinkkel nem megoldható).

7-15 **Megoldás:** Olyan szorzatot kell deriválnunk, aminek második tényezője összetett. Ennek alapján a következőket írhatjuk:

$$f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \text{arctg}(x^2))' = (\sqrt{x})' \cdot \text{arctg}(x^2) + \sqrt{x} \cdot (\text{arctg}(x^2))'$$

A szorzat deriválási szabályának használata után két helyen szerepel még deriválás. Nézzük az elsőt, azaz $\sqrt{x}$-et. Ennek deriváltja (mivel a négyzetgyök nem más, mint $1/2$-ik hatvány):

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ezután foglalkozzunk a másik tényezővel, azaz $\text{arctg}(x^2)$-tel. Ez egy összetett függvény. A külső függvény: $g(t) = \text{arctg}(t)$. A belső függvény: $h(x) = x^2$.

Ezeknek a deriváltjai:

$$g'(t) = (\text{arctg}(t))' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$h'(x) = (x^2)' = 2x$$

Ezek alapján a második tényező deriváltja: $(\text{arctg}(x^2))' = \dfrac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1+x^4}$

Részeredményeinket felhasználva írjuk fel az eredeti függvény deriváltját.

$$f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \text{arctg}(x^2))' = (\sqrt{x})' \cdot \text{arctg}(x^2) + \sqrt{x} \cdot (\text{arctg}(x^2))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{arctg}(x^2) + \sqrt{x} \cdot \frac{2x}{1+x^4}.$$

7-16 **Megoldás:** A két tagot külön-külön deriválhatjuk:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{\cos(e\cdot\pi)}\right)' = \left(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{\cos(e\cdot\pi)}\right)'$$

Ha tüzetesen megnézzük a második tagot, akkor azt látjuk, hogy abban nem szerepel a változó. Az $e$ és a $\pi$ egy-egy konstans, így szorzatuk is konstans. Ha annak $\cos$-át vesszük, újra csak konstanst kapunk, melynek reciproka is konstans. Konstans tag deriváltja pedig zérus, azaz

$$\left(\frac{1}{\cos(e\cdot\pi)}\right)' = 0.$$

A második taggal tehát nem kell foglalkoznunk, és így:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{\cos(e\cdot\pi)}\right)' = \left(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'$$

A jobb oldalon egy szorzat deriváltja áll. Alkalmazzuk a megfelelő deriválási szabályt:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \left(\operatorname{sh}^2 x\right)' \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{sh}^2 x \cdot (\operatorname{arctg}\sqrt{x})'$$

Két olyan rész maradt, amiben deriválni kell. Nézzük az elsőt, a $\operatorname{sh}^2 x$-et, ami $(\operatorname{sh} x)^2$ alakban is írható. Ez egy összetett függvény. Határozzuk meg ennek deriváltját.

A külső függvény deriváltja: $g'(t) = (t^2)' = 2t$.

A belső függvény deriváltja: $h'(x) = (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Ezek alapján: $\left((\operatorname{sh} x)^2\right)' = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$.

Felhasználva a $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$ azonosságot, ezt egyszerűbben is írhatjuk.

$\left((\operatorname{sh} x)^2\right)' = \operatorname{sh}(2x)$

Ezután nézzük a másik olyan részt, ahol még deriválnunk kell, ez az $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Ez is összetett függvény.

A külső függvény deriváltja: $g'(t) = (\operatorname{arctg} t)' = \dfrac{1}{1+t^2}$.

A belső függvény deriváltja: $h'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} == \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ezek alapján: $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 + x)}$

A részeredményeket felhasználva írjuk fel az eredeti függvény deriváltját:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sh}^2 x\right)' \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{sh}^2 x \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \operatorname{sh}(2x) \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{sh}^2 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 + x)}.$$

7-17 **Megoldás:**

Elsőként határozzuk meg, hol metszi a fügvény grafikonja a második (az $y$-) tengelyt. Az $y$-tengely pontjaiban $x = 0$, tehát ekkor $x$ helyébe 0-t kell helyettesítenünk a függvényben.

$$f(0) = \frac{0-4}{0+1} = -4$$

A függvény grafikonja tehát a $P_1 := (0{,}4)$ pontban metszi az $y$ tengelyt.

Következzék az első (az $x$-) tengellyel vett metszéspont. Az $x$-tengely pontjaiban $y = 0$, tehát ekkor olyan pontot kell keresnünk a függvény grafikonján, ahol a függvény értéke 0. Meg kell oldanunk az $f(x) = 0$ egyenletet. Így kapjuk, hogy:

$$\frac{x-4}{x+1} = 0.$$

Egy tört csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0. Ezzel egyszerűbb egyenletet kapunk, amit már könnyen megoldunk.

$$x - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4$$

A függvény grafikonja tehát a $P_2 := (4{,}0)$ pontban metszi az $x$ tengelyt.

Ezután írjuk fel az érintők egyenleteit. Ehhez szükségünk van a függvény deriváltjára.

$$f'(x) = \left(\frac{x-4}{x+1}\right)' = \frac{(x-4)' \cdot (x+1) - (x-4) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-4) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Az érintők egyenletét az $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ összefüggésből kapjuk.

A $P_1 = (0{,}4)$ pont esetén tudjuk hogy $x_0 = 0$ és $f(x_0) = 4$. Még az $f'(x_0)$ értékét kell meghatároznunk.

$$f'(x_0) = \frac{5}{(0+1)^2} = 5$$

Ezután az érintő egyenlete a $P_1 = (0{,}4)$ pontban:

$$y = 5(x - 0) + 4 = 5x + 4.$$

Hajtsuk végre ugyanezt a $P_2 = (4{,}0)$ pont esetén is.

$f'(x_0) = \dfrac{5}{(4+1)^2} = \dfrac{1}{5}$

Az érintő egyenlete a $P_2 = (4{,}0)$ pontban:

$$y = \frac{1}{5}(x - 4) + 0 = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}.$$

7-18 **Megoldás:** Szélsőérték feladattal állunk szemben. Az ilyen feladatokban nagyon gyakran geometriai feltételekkel meghatározott mennyiség legnagyobb vagy legkisebb értékét keressük. Ekkor első lépésként fel kell írnunk egy általunk választott változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy ezt a függvényt hol értelmezzük. Majd a függvény szélsőértékeit kell megkeresnünk az elméletből már megismert módon.

Ezután térjünk át a konkrét feladat megoldására.

Jelöljük a téglalap egyik oldalát $x$-szel, a másikat pedig $y$-nal. Ekkor a téglalap területe: $T = xy$.

Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között egy kényszerkapcsolat van, hiszen a kerület 20 cm. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal: $K = 20 = 2x + 2y$.

Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. $y$ kifejezhető: $y = 10 - x$.

Ha pedig ezután behelyettesítünk $y$ helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már *egyváltozós* függvényt kapunk, ami már csak $x$ függvénye:

$$T(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

Most határozzuk meg, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó. Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az $x$-nek azonban 10-nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala $10 - x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen az intervallumon kell keresnünk a fenti $T$ függvény maximumát. Szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált 0, így először is határozzuk meg a függvény deriváltját:

$$T'(x) = 10 - 2x$$

Most megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet:

$$10 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5$$

A deriváltnak a zérushelye a $(0{,}10)$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximumhely. Másszóval, ha a $T$ függvénynek egyáltalán van maximuma a $(0{,}10)$ intervallumon, az csakis az $x = 5$ helyen lehet.

Hogy itt valóban van-e szélsőérték, és az valóban maximum-e, azt a második derivált vizsgálatával dönthetjük el. Nyilván $T''(x) = -2$, így $T''(5)$ negatív szám: ezért $x = 5$ mellett valóban van szélsőérték, éspedig az lokális maximum. Sőt ez a $0 < x < 10$ intervallumon nemcsak lokális maximum, hanem *globális maximum* is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény (mert deriváltja itt pozitív), $x > 5$ esetén pedig végig csökken (mert deriváltja itt negatív).

A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal $5$ cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is $5$ cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.

A maximális területet nyilván $T(5) = 5(10-5) = 25$ területegység.

*1. Megjegyzés*: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy milyen adatot választunk változónak. Jelen feladatban elég kézenfekvő volt, hogy változónak a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege $10$, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb $5$-nél, mint amnnyivel a másik hosszabb $5$-nél. Választhatjuk változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az $5$-től eltérnek. Jelölje ezt $t$: ekkor a téglalap oldalai $5-t$ és $5+t$, területe pedig (most már $t$ függvényében): $T(t) = (5-t)\cdot(5+t) = 25-t^2$. Mivel $t^2$ sohasem lehet negatív, $T(t)$ értéke nyilvánvalóan akkor a legnagyobb, ha $t = 0$, azaz a téglalap mindkét oldala $5$ hosszúságú: a maximális terület pedig $25$ területegység. Ezzel a gondolatmenettel még a differenciálszámítási technikát is megkerültük: persze általában nincs ilyen szerencsénk.

*2. Megjegyzés*: A feladat a számtani-mértani közép egyenlőtlenség alkalmazásával is megoldható. A fenti jelölésekkel: $T = x\cdot y$. A számtani-mértani közép egyenlőtlenség szerint:

$$T = x\cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 25,$$

hiszen $(x+y)$ épp a kerület fele, azaz $10$. Tehát a terület legfeljebb $25$ területegység lehet: nyilvánvaló ugyanakkor, hogy ez a terület épp egy $5$ oldalhosszúságú négyzet területe.

7-19 **Megoldás:** Mindenekelőtt vizsgáljuk meg a határérték típusát, azt, hogy a L'Hospital-szabály alkalmazható-e.

A számláló hatákértéke: $\lim\limits_{x\to 3}\log(x-2)=\log(3-2)=\log 1=0.$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=0.$

A határérték tehát – kissé pongyolán kifejezve – „$\frac{0}{0}$” típusú. Teljesülnek a L'Hospital-szabály feltételei, azaz az eredeti tört határértéke megegyezik azon tört határértékével, melyet a számláló és a nevező deriválásával kapunk. Ez most a következőt jelenti:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log(x-2)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(\log(x-2))'}{(x^2-9)'}$$

Hajtsuk végre a deriválásokat.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log(x-2)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(\log(x-2))'}{(x^2-9)'}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x-2}}{2x}$$

A jobb oldal most már az $x$ változó *folytonos* függvénye az $x=3$ hely környezetében, így a határérték már egyszerű behelyettesítéssel meghatározható.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x-2}}{2x}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{3-2}}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

A L'Hospital-szabály szerint ez megegyezik az eredeti tört határértékével, azaz

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log(x-2)}{x^2-9}=\frac{1}{6}.$$

7-20 **Megoldás:** Először is vizsgáljuk meg a határérték típusát, azt, hogy a L'Hospital-szabály alkalmazható-e.

A számláló hatáértéke: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-6)=1^2+5\cdot 1-6=0.$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=1^2-1=0.$

A határérték tehát – röviden szólva – „$\frac{0}{0}$" típusú. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt: a differenciálhatósági feltételek nyilván teljesülnek.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+5x-6)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{2x}$$

A jobb oldali tört már $x$-nek *folytonos* függvénye az $x=1$ helyen, így határértéke egyszerű behelyettesítéssel meghatározható:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot 1+5}{2\cdot 1}=\frac{7}{2}$$

Ugyanez az eredeti tört határértéke is, azaz

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\frac{7}{2}.$$

*Megjegyzés*: A L'Hospital-szabály alkalmazása elkerülhető, ha észrevesszük, hogy a számláló és a nevező is szorzattá bontható:

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\frac{(x+6)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x+6}{x+1},$$

ami már $x$-nek folytonos függvénye az $x=1$ helyen is, így a keresett határérték a helyettesítési értékkel egyezik:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\frac{1+6}{1+1}=\frac{7}{2}.$$

7-21 **Megoldás:** Először is vizsgáljuk meg a határérték típusát, azt, hogy a L'Hospital-szabály alkalmazható-e.

A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = \sin^2 0 = 0$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos 3x) = 1 - \cos(3 \cdot 0) = 0$

A határérték tehát – röviden szólva – „$\frac{0}{0}$" típusú. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt: a differenciálhatósági feltételek nyilván teljesülnek. Mind a számláló, mind a nevező deriválásánál ügyeljünk, mert mindegyikben előfordul összetett függvény.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin^2 x\right)'}{(1-\cos 3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{-(-\sin 3x)\cdot 3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{3\sin 3x}$$

Vizsgáljuk meg az új határérték típusát.

A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 0} (2\sin x \cdot \cos x) = 2\sin 0 \cdot \cos 0 = 0$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 0} 3\sin 3x = 3\sin(3 \cdot 0) = 0$

A határérték tehát ismét „$\frac{0}{0}$" típusú. Alkalmazzuk tehát ismételten a L'Hospital-szabályt. A számlálóban most egy szorzatot kell deriválnunk, a nevezőben pedig összetett függvényt.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{3\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2\sin x \cdot \cos x)'}{(3\sin 3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x))}{9\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{9\cos 3x}$$

Ezután már behelyettesítéssel megkapjuk a a határértéket, mivel a jobb oldali kifejezés $x$-nek folytonos függvénye az $x = 0$ helyen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{9\cos 3x} = \frac{2(\cos^2 0 - \sin^2 0)}{9\cos(3\cdot 0)} = \frac{2}{9}$$

Ezzel egyezik meg az eredeti határérték is, azaz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x} = \frac{2}{9}.$$

*1. Megjegyzés*: A L'Hospital-szabály első alkalmazása után egy kicsit egyszerűbben is haladhattunk volna, ha felhasználjuk az ismert $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ összefüggést. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{3\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3\sin 3x}$$

Így a számlálóban nem szorzat áll, hanem összetett függvény, s a szabály másodszori alkalmazásakor egyszerűbb a deriválás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)'}{(3\sin 3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{9\cos 3x}$$

A határértéket ezután már behelyettesítéssel kapjuk.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{9\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2\cdot 0)}{9\cos(3\cdot 0)} = \frac{2}{9}.$$

*2. Megjegyzés*: A L'Hospital-szabály első alkalmazása után egy másik egyszerűsítési lehetőség, ha észrevesszük, hogy a kiszámítandó új határérték egy olyan szorzat határértéke, melynek egyik tényezője *folytonos* függvény:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{3\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}$$

A jobb oldali kifejezés határértéke pedig L'Hospital-szabállyal egyszerűen számítható (az Olvasó ellenőrizze, hogy az alkalmazás feltételei teljesülnek!):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3\cos 3x} = \frac{1}{3},$$

így az eredeti kifejezés határértéke $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

7-22 **Megoldás:** Egy különbség határértéke a kérdés: vizsgáljuk meg először a két tag határértékét külön-külön. Látjuk, hogy egyik határérték sem létezik, és pl. a jobb oldali határértékek végtelenek:

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sin x}=\infty$$

A különbség határértékét tehát közvetlenül nem tudjuk kiszámítani, és még a L'Hospital-szabály sem alkalmazható. Ha azonban közös nevezőre hozunk, olyan törtet kapunk, melyze a L'Hospital-szabály már alkalmazható, mert:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}$$

és a jobb oldali határérték típusát már „$\frac{0}{0}$" típusú, hiszen

$$\lim_{x\to0}(\sin x-x)=\sin 0-0=0$$

$$\lim_{x\to0}(x\cdot\sin x)=0\cdot\sin 0=0.$$

Teljesülnek tehát a L'Hospital szabály feltételei.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x-x)'}{(x\cdot\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{1\cdot\sin x+x\cdot\cos x}$$

Vizsgáljuk meg a kapott új határérték típusát.

$$\lim_{x\to0}(\cos x-1)=\cos 0-1=0$$

$$\lim_{x\to0}(\sin x+x\cdot\cos x)=\sin 0\cdot\cos 0=0$$

Látható, hogy ismét „$\frac{0}{0}$" típusú a határérték. Újra alkalmazzuk a tehát a L'Hospital-szabályt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x+x\cdot\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)}$$

Ezt a határértéket pedig már behelyettesítéssel megkaphatjuk, mert a jobb oldali kifejezés $x$-nek *folytonos* függvénye az $x=0$ helyen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 0}{2\cos 0-0\cdot\sin 0}=\frac{0}{2}=0$$

Ezzel egyenlő tehát az eredeti határérték is, azaz:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0.$$

# 21. lecke

## Taylor-polinomok, Taylor-sorok

# 8. Taylor-sorok

Számos elméleti és gyakorlati feladat esetében előforduló igény, hogy bizonyos bonyolult formulával megadott függvényeket egyszerűbbekkel közelítsünk. Ebben a fejezetben egy lehetséges ilyen technikát mutatunk be. Itt feltesszük, hogy a közelítendő függvények elég simák, azaz elég sokszor differenciálhatók. A közelítés pedig az egyik legegyszerűbb függvényosztállyal, nevezetesen polinomokkal történik.

## 8.1. Taylor-polinomok

8-1. Definíció: Legyen $a \in \mathbf{R}$ egy rögzített pont és $f$ az $a$ pont egy környezetében értelmezett elég sima valós függvény, azaz legyen $f : [a-\delta, a+\delta] \to \mathbf{R}$ $n$-szer folytonosan differenciálható. A

$$T_n f(x) := f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{1!} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

egyenlőséggel értelmezett $n$-edfokú $T_n f$ polinomot az $f$ függvény $a$ helyen vett $n$-edfokú *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Látjuk, hogy a Taylor-polinom előállításához az adott $f$ függvénynek csak az egyetlen $a \in \mathbf{R}$ pontban felvett értékének és deriváltjainak ismeretére van szükség.

8-1. Példa: A definíció azonnali következménye, hogy egy legfeljebb $n$-edfokú polinom $n$-edfokú Taylor-polinomja önmagával egyezik meg.

8-2. Példa: Az $e$ alapú exponenciális függvény 0 körüli elsőfokú Taylor-polinomja $1 + x$.

Megmutatjuk, hogy a Taylor-polinom az a hely körül „körülbelül” úgy viselkedik, mint az eredeti $f$ függvény. Pontosabban:

**8-1. Állítás:** Az $f$ függvény és deriváltjainak értéke az $a$ pontban megegyezik a megfelelő Taylor-polinom értékével ill. deriváltjaival, az $n$-edrendű deriválttal bezárólag:

$$f^{(k)}(a) = (T_n f)^{(k)}(a) \qquad (k = 0,1,...,n).$$

**Bizonyítás:**

Nyilvánvaló, hogy $f(a) = T_n f(a)$. $T_n f$-et deriválva:

$$(T_n f)'(x) = f'(a) + \frac{2}{2!} f''(a)(x-a) + \frac{3}{3!} f'''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{n}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1} =$$

$$= f'(a) + \frac{1}{1!} f''(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f'''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1},$$

innen $(T_n f)'(a) = f'(a)$. Még egyszer deriválva:

$$(T_n f)''(x) = f''(a) + \frac{2}{2!} f'''(a)(x-a) + \frac{3}{3!} f^{IV}(a)(x-a)^2 + ... + \frac{(n-1)}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2} =$$

$$= f''(a) + \frac{1}{1!} f'''(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f^{IV}(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2},$$

innen pedig $(T_n f)''(a) = f''(a)$, és így tovább. Az eljárás az $n$-edik derivált kiszámításáig folytatható: $(T_n f)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ . $T_n f$-nek minden, $n$-nél magasabb rendű deriváltja azonosan 0. $\square$

A bizonyításából kiolvasható az alábbi, önmagában is érdekes állítás:

**8-2. Állítás:** Az $f$ függvény $n$-edfokú Taylor-polinomjának deriváltja megegyezik az $f'$ deriváltfüggvény $(n-1)$-edfokú Taylor-polinomjával:

$$(T_n f)'(x) = (T_{n-1} f')(x).$$

Speciális esetek:

$(a)$ Az $f$ függvény 0-adfokú Taylor-polinomja:

$$T_0 f(x) = f(a).$$

$(b)$ Az $f$ függvény elsőfokú Taylor-polinomja:

$$T_1 f(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Most megmutatjuk, hogy a Taylor-polinom bizonyos értelemben valóban jól közelíti az eredeti $f$ függvényt (nemcsak az $a$ pontban):

**8-3. Tétel:** (kifejtési tétel). Ha az $f$ függvény $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható az $[a-\delta, a+\delta]$ intervallumon, akkor minden $x \in [a-\delta, a+\delta]$ ponthoz van oly $\xi$ az $a$ és az $x$ számok között, hogy

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

**Bizonyítás:**

A formula $x = a$ esetén nyilvánvaló. Legyen tehát $x \neq a$ egy tetszőleges, rögzített szám. Jelölje $g$ a

$$g(t) := f(t) - T_n f(t) - \omega(t-a)^{n+1}$$

képlettel értelmezett függvényt, ahol $\omega$ a következő számot jelöli:

$$\omega := \frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Akkor $g(a) = f(a) - T_n f(a) = 0$ (az előző állítás miatt) és

$$g(x) = f(x) - T_n f(x) - \frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1} = 0,$$

azaz $g(a) = g(x)$. A *Rolle-tétel* miatt van oly $x_1 \in (a,x)$, hogy $g'(x_1) = 0$. Deriválva $g$-t:

$$g'(t) = f'(t) - (T_n f)'(t) - \omega(n+1)(t-a)^n.$$

Innen $g'(a) = 0$ (ismét az előző állítás miatt). Mivel pedig $g'(x_1) = 0$, ismét a Rolle-tétel miatt van oly $x_2 \in (a,x_1)$ , hogy $g''(x_2) = 0$, és így tovább. Egészen $(n+1)$-ig mehetünk: van tehát olyan $x_{n+1} \in (a,x_n)$, hogy $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. Ugyanakkor $g$ definíciójából ezt a deriváltat közvetlenül is kiszámíthatjuk:

$$0 = g^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}) - \omega \cdot (n+1)!$$

Innen $\omega$-ra azt kapjuk, hogy $\omega = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{n+1)!}$, amit $\omega$ definíciójával összehasonlítva:

$$\omega = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{n+1)!} = \frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}},$$

ahonnan

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_{n+1})(x-a)^{n+1},$$

és ezzel a bizonyítás kész ($\xi := x_{n+1}$ mellett). $\square$

8-2. Definíció: A fenti formulában az $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ tagot *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük, és $R_{n+1}(f,x)$-szel jelöljük.

Ezzel a jelöléssel a tétel az

$$f(x) = T_n f(x) + R_{n+1}(f,x)$$

alakba írható.

Innen nyilvánvaló, hogy az $f$ függvényt a Taylor-polinomja akkor közelíti „jól”, ha a megfelelő Lagrange-maradéktag „kicsi”. A következő szakaszban ennek pontosabb megfogalmazásával foglalkozunk.

## 8.2. Taylor- és Maclaurin-sorok, konvergenciájuk

A kifejtési tétel azonnali következménye, hogy ha a Lagrange-maradéktag egy intervallumon 0-hoz tart ($n \to +\infty$ mellett), akkor a Taylor-polinomok sorozata azon az intervallumon az eredeti $f$ függvényhez tart.

**8-4. Következmény:** Legyen $f$ akárhányszor differenciálható (más szóhasználattal: végtelen sokszor differenciálható) az $[a-\delta,a+\delta]$ intervallumon. Ha valamely $x \in [a-\delta,a+\delta]$ mellett $R_n(f,x) \to 0$, akkor $f(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n f(x)$, azaz, más felírásban:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots.$$

Ezt a végtelen sort az $f$ függvény $a$ pont körüli *Taylor-sorának* nevezzük.

*Speciális eset*. A 0 pont körüli Taylor-sorokat *Maclaurin-soroknak* is nevezzük. Ennek formája tehát

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots}$$

Felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek biztosítják a Lagrange-féle maradéktag 0-hoz tartását, tehát azt, hogy a Taylor-sor konvergens legyen. Ehhez az kell, hogy a deriváltak abszolút értéke ne nőjön túl gyorsan a deriválás rendjével. Erre egy egyszerű elégséges feltételt ad a következő állítás.

**8-5. Állítás:** Legyen $f$ akárhányszor differenciálható az $[a-\delta,a+\delta]$ intervallumon. Ha vannak olyan $A,C \geq 0$ számok, hogy minden $x \in [a-\delta,a+\delta]$ mellett $|f^{(n)}(x)| \leq C \cdot A^n$ (a deriváltak abszolút értéke legfeljebb exponenciálisan nő $n$ növekedésével), akkor $R_n(f,x) \to 0$ a szóban forgó intervallumon, tehát a függvény $a$ körüli Taylor-sora minden $x \in [a-\delta,a+\delta]$ esetén konvergens, és összege $f(x)$.

Bizonyítás:

Ekkor

$$|R_n(f,x)| = \frac{|f^{(n)}(\xi)| \cdot |x-a|^n}{n!} \leq C \cdot \frac{A^n |x-a|^n}{n!} \to 0$$

(ha $n \to +\infty$) minden $x \in [a-\delta, a+\delta]$ pontban. $\square$

Megjegyezzük, hogy a fenti feltétel már sokszor igen egyszerű függvények esetén sem teljesül, ahogy az a következő példákban is látható.

**8-3. Példa:** Legyen $f(x) := \frac{1}{1-x}$ és $a := 0$. Akkor

$$|f^{(n)}(x)| = \frac{n!}{|1-x|^{n+1}},$$

innen $|f^{(n)}(0)| = n!$, azaz a deriváltak abszolút értéke *faktoriális* sebességgel nő, ami nagyon gyors növekedés.

**8-4. Példa:** Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Igazolható, hogy $f^{(n)}(0) = 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, így a függvény Maclaurin-sora azonosan 0. A Maclaurin-sor tehát minden $x \in \mathbf{R}$ esetén konvergens ugyan, de csak a 0-ban állítja elő az eredeti $f$ függvényt.

## 8.3. Néhány függvény Maclaurin-sora

Mivel egy egyszerű változótranszformációval mindig elérhető, hogy a Taylor-kifejtés a 0 körül legyen végrehajtva, a továbbiakban már csak ezzel a speciális esettel foglalkozunk.

**8-5. Példa:** Legyen $f(x) := e^x$ . Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots,$$

vagyis az exponenciális függvény Maclaurin-sora saját definiáló sorával, az exponenciális sorral egyezik meg.

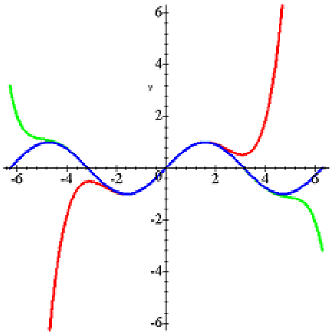
*Megoldás.* Ekkor ui. minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $f^{(n)}(x) = e^x$ , így $f^{(n)}(0) = 1$. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

**8-6. Példa:** Legyen $f(x) := \sin x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots.$$

*Megoldás.* $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ és így tovább. Innen minden páros $n$-re $f^{(n)}(0) = 0$ és minden páratlan $n$-re $f^{(n)}(0)$ az 1 és $(-1)$ számok valamelyike. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

Az alábbi ábrán illusztrációként bemutatjuk, hogyan közelíti a szinuszfüggvényt a 0 körül az ötödfokú, ill. a 11-edfokú Taylor-polinomja.




41. ábra. A szinuszfüggvény 0 körüli közelítése 5-ödfokú és 11-edfokú Taylor-polinomokkal

**8-7. Példa:** Legyen $f(x) := \cos x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots.$$

*Megoldás* $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ és így tovább. Innen minden páratlan $n$-re $f^{(n)}(0) = 0$, és minden páros $n$-re $f^{(n)}(0)$ az 1 és $(-1)$ számok valamelyike. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

A következő két példa ismét rávilágít a trigonometrikus és hiperbolikus függvények analógiájára.

8-8. Példa: Legyen $f(x) := \operatorname{sh} x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots,$$

vagyis a sor csak a tagok előjelében különbözik a szinuszfüggvény Maclaurin-sorától.

*Megoldás*. $f'(x) = \operatorname{ch} x$, $f''(x) = \operatorname{sh} x$, $f'''(x) = \operatorname{ch} x$ és így tovább. Innen minden páros $n$-re $f^{(n)}(0) = 0$, és minden páratlan $n$-re $f^{(n)}(0) = 1$. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

8-9. Példa: Legyen $f(x) := \operatorname{ch} x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots,$$

vagyis a sor csak a tagok előjelében különbözik a koszinuszfüggvény Maclaurin-sorától.

*Megoldás*. $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x$, $f'''(x) = \operatorname{sh} x$ és így tovább. Innen minden páratlan $n$-re $f^{(n)}(0) = 0$, és minden páros $n$-re $f^{(n)}(0) = 1$. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

8-10. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1-x}$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

vagyis a Maclaurin-sor a már ismert végtelen mértani sor.

*Megoldás*.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \qquad f'''(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}, \dots,$$

és így tovább, tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, ahonnan $f^{(n)}(0) = n!$. Innen a Maclaurin-sor fenti alakja már következik. Ismeretes, hogy a sor minden $|x| < 1$ szám esetén konvergens és összege $\frac{1}{1-x}$.

8-11. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1+x}$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots.$$

*Megoldás*. Az előző példából következik, $x$ helyére $(-x)$-et írva.

8-12. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots.$$

*Megoldás*. Az előző példából következik, $x$ helyére $x^2$-et írva.

8-13. Példa: Legyen $f(x) := \log(1+x)$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots.$$

*Megoldás*. A függvény deriváltja $\frac{1}{1+x}$, az $n$-edik derivált megegyezik az $\frac{1}{1+x}$ függvény $(n-1)$-edik deriváltjával, ami $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Innen

$$\log(1+x) = 0 + \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots.$$

8-14. Példa: (binomiális sor). $f(x) := (1+x)^\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$ adott szám (nem feltétlen egész). Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots.$$

Speciálisan

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots,$$

és

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots.$$

*Megoldás*.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$

és így tovább. Innen

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \dots,$$

ahonnan a Maclaurin-sor alakja már adódik. Azt, hogy a sor minden $|x| < 1$ esetén konvergens, és összege $(1+x)^\alpha$, nem bizonyítjuk.

## 8.4. A komplex exponenciális függvény. A komplex számok exponenciális alakja

Mint azt már korábban említettük, az exponenciális függvény az exponenciális sor segítségével minden nehézség nélkül kiterjeszthető a komplex számsíkra.

8-3. Definíció: Legyen $z \in \mathbf{C}$ tetszőleges komplex szám és

$$e^z := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots.$$

Az így nyert $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényt *komplex exponenciális függvénynek* nevezzük.

Speciálisan, legyen $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges, és tekintsük a komplex exponenciális függvényt a tiszta képzetes $(it)$ argumentummal:

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{i^2t^2}{2!} + \frac{i^3t^3}{3!} + \frac{i^4t^4}{3!} + \dots = 1 + \frac{it}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{3!} + \dots,$$

felhasználva az $i$-hatványokra vonatkozó korábbi észrevételt.

Különválasztva a valós és képzetes tagokat és felhasználva a szinusz- és koszinuszfüggvények Maclaurin-sorát:

$$e^{it} = \left(1 + -\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \dots\right) + i\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = \cos t + i \sin t$$

A következő tételhez jutottunk.

8-6. Állítás: (Euler-formula). Tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ esetén

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Innen és a komplex számok trigonometrikus alakjából azonnal adódik:

8-7. Következmény: (a komplex számok exponenciális alakja). Legyen $z \in \mathbf{C}$ tetszőleges komplex szám, amelynek trigonometrikus alakja $z = r(\cos t + i \sin t)$. Akkor teljesül a

$$z = re^{it}$$

egyenlőség is, amelyet a $z$ komplex szám *exponenciális alakjának* nevezünk.

Hangsúlyozzuk, hogy itt $r$ és $t$ *valós* számok, és $t$ ívmértékben méri a komplex szám argumentumát mint szöget. Az is világos, hogy minden valós $t$ esetén $e^{it}$ abszolút értéke épp 1, azaz $e^{it}$ a komplex egységkörön van.

8-15. Példa: Az $i$-hatványok exponenciális alakjai:

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad i^2 = -1 = e^{\pi i}, \quad i^3 = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}, \quad i^4 = 1 = e^{2\pi i}, \quad \ldots.$$

Megjegyezzük, hogy a szorzás és az osztás, különösen pedig a hatványozás és a gyökvonás az exponenciális alakkal – felhasználva a hatványozás azonosságait – még a trigonometrikus alak használatánál is egyszerűbb.

# 22. lecke

# Ellenőrző kérdések, feladatok

## 8.5. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** Az $x \to \dfrac{x}{1-3x^2}$ leképezés Maclaurin-sorában $x^2$ együtthatója

☐ $3$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $3$ ☐ $0$

**2.** Az $x \to \sqrt{1-x^2}$ leképezés Maclaurin-sorában $x^2$ együtthatója

☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $0$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $1$

**3.** Az $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ leképezés Maclaurin-sorában $x^4$ együtthatója

☐ $1$ ☐ $-1$ ☐ $0$ ☐ $-\frac{1}{4!}$

**4.** Az $x \to e^{-x^2}+1$ leképezés Maclaurin-sorában $x^4$ együtthatója

☐ $0$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-1$

**5.** Az $f$ függvény Taylor-sora egy helyen biztosan konvergens, ha $f$

☐ folytonos
☐ differenciálható
☐ akárhányszor differenciálható
☐ Lagrange-féle maradéktagja itt zérushoz tart

**6.** Egy 20-adfokú polinom Maclaurin-sora

- ☐ végtelen sok tagja különbözik zérustól
- ☐ önmagával egyezik
- ☐ legfeljebb 19-edfokú polinom
- ☐ pontosan 21-edfokú polinom

**7.** Mivel egyenlő az $e^{-11\pi i}$ szám?

☐ $1$ ☐ $-1$ ☐ $-i$ ☐ $i$

**8.** Mivel egyenlő az $e^{1+\pi i}$ szám abszolút értéke?

☐ $1$ ☐ $\pi$ ☐ $e$ ☐ $e^{\pi}$

End Quiz

Score:

## 8.6. Feladatok

**8-1. Feladat:** „Az $x \to \sin x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots.$$

Ezért az $x \to \sin \sqrt{x}$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin \sqrt{x} = x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{5!}x^{5/2} - \frac{1}{7!}x^{7/2} + \ldots''.$$

Igaz-e ez az állítás vagy sem, és miért?

Megoldás: itt

---

**8-2. Feladat:** Igazoljuk, hogy $|x| < 1$-re a

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \ldots$$

sor konvergens, és összege $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

Megoldás: itt

---

**8-3. Feladat:** Van egy, csak a négy alapműveletet ismerő kalkulátorunk. Adjunk algoritmust a $\log 2$ szám közelítő kiszámítására! (Ha kell, használjuk az $e = 2{,}71828\ldots$ értéket, de a feladat enélkül is megoldható!)

Megoldás: itt

**8-4. Feladat:** Van egy csak 4 alapműveletes gépünk. Felhasználva azt, hogy $\log 2 = 0{,}693147\ldots$, számítsuk ki $\log 2{,}01$ értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal!

Megoldás: itt

**8-5. Feladat:** Ismerve a $\log 100 = 4{,}60517\ldots$ értéket, hogyan lehet $\log 101$-et kiszámítani 4 alapművelettel (tetszőleges pontossággal)?

Megoldás: itt

**8-6. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi formulákkal értelmezett függvények Maclaurin-sorát.

(a)

$$x \to e^{-x^2},$$

(b)

$$x \to \frac{2}{3-x},$$

(c)

$$x \to \frac{1+x^2}{1-x^2},$$

(d)

$$x \to \log(2+x^2),$$

(e)

$$x \to \log\frac{1+x}{1-x},$$

(f)

$$x \to e^{1+x^2} + e^{1-x^2},$$

(g)

$$x \to \log\frac{(1+x)^2}{1-x^2},$$

(h)

$$x \to \log\frac{e^x+2}{2e^{-x}+1}.$$

Megoldás: itt

**8-7. Feladat:** Írjuk fel az $f(x) := \sqrt[3]{x+1}$ formulával értelmezett függvény másodfokú Maclaurin-polinomját és a Maclaurin-sorát.

**Megoldás:** itt

---

**8-8. Feladat:** Írjuk fel az $f(x) := \sin 2x$ formulával értelmezett függvény $a := \dfrac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját, és a Taylor-sorát.

**Megoldás:** itt

---

**8-9. Feladat:** Melyik az a harmadfokú $p$ polinom, melyre a következők igazak:
$p(0) = 3, \quad p'(0) = -1, \quad p''(0) = -6, \quad p'''(0) = 12$ ?

**Megoldás:** itt

---

**8-10. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \dfrac{x-1}{x-4}$ formulával értelmezett függvény Maclaurin-sorát.

**Megoldás:** itt

---

**8-11. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \sin x \cos x$ formulával értelmezett függvény Maclaurin-sorát.

**Megoldás:** itt

---

**8-12. Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) := \sin^2 x$ formulával értelmezett függvény Maclaurin-sorát.

Megoldás: itt

---

**8-13. Feladat:** Hogyan határozhatjuk meg $\frac{1}{\sqrt{6}}$ közelítő értékét egy négy alapműveletes számológép segítségével?

Megoldás: itt

---

8-1 **Megoldás:**

Nem igaz. A szóban forgó függvény ui. a 0-ban *nem* differenciálható. Ugyanakkor igaz, hogy

$$\sin\sqrt{x} = x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{5!}x^{5/2} - \frac{1}{7!}x^{7/2} + \ldots \qquad (x \geq 0),$$

de a jobb oldali sor nem Maclaurin-sor.

**8-2 Megoldás:**

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := -\frac{1}{(1+x)^2}$ függvényt fejtsük Maclaurin-sorba. Nyilván:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f'''(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \ldots$$

innen

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 2!, \quad f''(0) = -3!, \quad f'''(0) = 4!, \ldots$$

és így tovább. Ezért a

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \ldots$$

sor az $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ függvény Maclaurin-sora. A 8-14. Példa állításából következik, hogy a sor minden $|x| < 1$ szám esetén konvergens, és összege $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

**8-3 Megoldás:**

$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = -\log\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \ldots.$$

Más megoldás:

$$\log 2 = \log\left(e\cdot\frac{2}{e}\right) = 1 + \log\frac{2}{e} = 1 + \log\frac{e-(e-2)}{e} = 1 + \log\left(1-\frac{e-2}{e}\right) =$$

$$1 - \frac{e-2}{e} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e-2}{e}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{e-2}{e}\right)^3 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{e-2}{e}\right)^4 - \ldots.$$

8-4 **Megoldás:**

$$\log 2{,}01 = \log(2 + 0{,}01) = \log 2 + \log(1 + 0{,}005) =$$
$$= \log 2 + 0{,}005 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}005^2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}005^3 - \ldots$$

Már az első két tag összege 4 tizedesjegy pontossággal adja a kívánt eredményt: $\log 2{,}01 \approx 0{,}6981$.

8-5 **Megoldás:**

$$\log 101 = \log(100+1) = \log 100 + \log(1+0.01) =$$
$$= \log 100 + 1 - 0.01 + \frac{1}{2}\cdot 0.01^2 - \frac{1}{3}\cdot 0.01^3 + \ldots$$

8-6 **Megoldás:**

$(a)$

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + \frac{1}{4!}(-x^2)^4 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \ldots$$

$(b)$

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}x + \frac{2}{3^3}x^2 + \frac{2}{3^4}x^3 + \ldots$$

$(c)$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{1-x^2} = 1 + 2x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} =$$

$$= 1 + 2x^2 \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots$$

$(d)$

$$\log(2+x^2) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \log 2 + \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$= \log 2 + \frac{1}{1 \cdot 2^2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 2^2}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}x^6 - \frac{1}{4 \cdot 2^4}x^8 + \ldots$$

$(e)$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...\right) - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - ...\right)$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + ...$$

$(f)$

$$e^{1+x^2} + e^{1-x^2} = e \cdot e^{x^2} + e \cdot e^{-x^2} =$$

$$= e \cdot \left(1 + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^5 + ...\right) + e \cdot \left(1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^5 + ...\right) =$$

$$= 2e + \frac{2e}{2!}x^4 + \frac{2e}{4!}x^8 + ...$$

$(g)$

$$\log\frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \log\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)} = \log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...\right) - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - ...\right)$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + ...$$

$(h)$

$$\log\frac{e^x + 2}{2e^{-x} + 1} = \log\left(e^x \cdot \frac{1 + 2e^{-x}}{2e^{-x} + 1}\right) = \log e^x = x,$$

és ez a Maclaurin-sor is (minden további $x$-hatvány együtthatója 0).

**8-7 Megoldás:**

A másodfokú Maclaurin-polinomot annak definíciója alapján is kiszámíthatjuk:

$$T_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Elő kell állítanunk az $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Helyettesítsük be elsőként a függvénybe a $0$-t.

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját (ne feledjük: a gyök törtkitevős hatvány):

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}} \ ,$$

így:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Helyettesítsük be a deriváltba a $0$-t.

$$f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Állítsuk elő a második deriváltat is.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$$

Határozzuk meg a második derivált $0$ helyen vett helyettesítési értékét.

$$f'(0) = -\frac{2}{9}(0+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}$$

Végül a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$$T_2f(x) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot x^2 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$$

A teljes Maclaurin-sor együtthatóit – elvben – hasonlóan, további deriválásokkal is megkaphatjuk. Ennél egyszerűbb, ha az $f(x) := (1+x)^\alpha$ formulával értelmezett függvény ismert Maclaurin-sorából (binomiális sor) indulunk ki:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$\alpha$ helyébe $\frac{1}{3}$-ot helyettesítve, azonnal a keresett Maclaurin-sorhoz jutunk:

$$T_2f(x) + 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}{4!}x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3^1\cdot 1!}x - \frac{2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4 + \ldots$$

A sor $|x| < 1$ esetén konvergens.

8-8 **Megoldás:** A feladatot kétféleképp oldjuk meg. Elsőként a definícióból indulunk el. Eszerint az $f$ függvény $a$ helyen vett $n$-edfokú Taylor-polinomja a következő:

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \cdots + + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

Mivel másodfokú polinomot kell előállítani, azért most $n = 2$.

$$T_2 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2$$

A függvény, valamint első és második deriváltjának értékét az $a := \frac{\pi}{4}$ helyen kell kiszámítani:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Összetett függvényről lévén szó, ne felejtsünk el szorozni a belső függvény deriváltjával:

$$f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x,$$

ahonnan:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Ezután deriváljunk még egyszer:

$$f''(x) = 2(-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

A második deriváltba is helyettesítsük be az $a = \frac{\pi}{4}$ értéket:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{2} = -4$$

Az előzőekben meghatározott $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket írjuk be a Taylor-polinom képletébe, és egyúttal helyettesítsünk $a$ helyére is.

$$T_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Végül hozzuk egyszerűbb alakra a polinom együtthatóit.

$$T_2f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Lássuk ezután a feladat egy másik megoldását. Felhasználva az ismert $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$\sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Vezessük be az $u = x - \frac{\pi}{4}$ jelölést. Így $\sin 2x = \cos 2u$.

Mivel ha $x = \frac{\pi}{4}$, akkor $u = 0$, ezért az $x \mapsto \sin 2x$ függvény $a = \frac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor polinomja megegyezik a $u \mapsto \cos 2u$ függvény $u = 0$ helyen vett másodfokú Taylor polinomjával. Ám az $x \mapsto \cos x$ függvény Maclaurin-sora ismert:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

Hagyjuk el a másodfokúnál magasabb fokú tagokat, és írjunk $x$ helyett $2u$-t. Így megkapjuk a $\cos 2u$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját.

$$T_2(\cos 2u, u) = 1 - \frac{1}{2!}(2u)^2 = 1 - 2u^2$$

Ezután pedig már csak annyit kell tennünk, hogy $u$ helyére $x - \frac{\pi}{4}$-et helyettesítünk

$$T_2f(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Ez a megközelítés alkalmas arra is, hogy mindjárt a teljes Taylor-sort felírhassuk:

$$\sin 2x = \cos 2u = 1 - \frac{2^2}{2!}u^2 + \frac{2^4}{4!}u^4 - \frac{2^6}{6!}u^6 + \frac{2^8}{8!}u^8 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6 + \frac{2^8}{8!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^8 - \ldots$$

*Megjegyzés*: A levezetésben hallgatólagosan felhasználtuk a Taylor-sorok *egyértelműségét*, melyet nem bizonyítottunk. Eszerint, ha egy $f$ függvényt elő tudunk állítani egy intervallumon konvergens

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots$$

alakban, akkor ez a sor szükségképp az $f$ függvény $a$ körüli Taylor-sora. Ez lehetővé teszi, hogy sok függvény Taylor- (ill. Maclaurin-) sorát visszavezessük egyszerűbb függvények ismert Taylor (ill. Maclaurin-) sorára.

8-9 **Megoldás:** Ismert egy $p$ függvény és deriváltjainak értéke a $0$ helyen, ezért a Maclaurin-sor felírásából indulhatunk ki, mely szerint:

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}p''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}p''(0) \cdot x^3 + \ldots$$

Most $p$ maga is polinom, így őt előállítja a Maclaurin-sora. Mivel pedig a polinom harmadfokú, így negyedik és annál magasabb rendű deriváltjai azonosan $0$-val egyenlőek. Ez azt jelenti, hogy a Maclaurin-sorban a haramadfokúnál magasabb fokú tagok nem szerepelnek, azaz a harmadfokú Maclaurin-polinom maga a keresett polinom:

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}p''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}p'''(0) \cdot x^3.$$

Ide már csak be kell helyettesítenünk a függvény és a deriváltak megadott értékeit.

$$p(x) = 3 + \frac{1}{1!} \cdot (-1) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot (-6) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot 12 \cdot x^3$$

Végezzük el az együtthatókban a műveleteket.

$$p(x) = 3 - x - 3x^2 + 2x^3$$

Vagy csökkenő fokszám szerint írva a tagokat:

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

8-10 **Megoldás:** A feladat a Maclaurin-sorok definíciójának közvetlen alkalmazásával csak nehézkesen oldható meg, mivel az egyre magasabb rendű deriváltak kiszámítása egyre bonyolultabbá válik. Célszerű ezért már ismert Maclaurin-sorra visszavezetni a feladatot. Egyszerű algebrai átalakításokkal adódik, hogy:

$$\frac{x-1}{x-4} = \frac{x-4+3}{x-4} = 1 + \frac{3}{x-4} = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

Innen nyomban látható, hogy utolsó törtkifejezés Maclaurin-sora az $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ leképezés Maclaurin-sorából adódik, $x$ helyére szisztematikusan $\frac{x}{4}$-et írva:

$$\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = 1 + \frac{1}{4^1}x + \frac{1}{4^2}x^2 + \frac{1}{4^3}x^3 + \dots$$

Innen pedig:

$$\frac{x-1}{x-4} = 1 - \frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^1}x + \frac{1}{4^2}x^2 + \frac{1}{4^3}x^3 + \dots\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4^2}x - \frac{3}{4^3}x^2 - \frac{3}{4^4}x^3 + \dots$$

A sor konvergens, ha $|\frac{x}{4}| < 1$, azaz, ha $|x| < 4$.

8-11 **Megoldás:**

Célszerűnek látszik a feladat visszavezetése más, már ismert Maclaurin-sorokra. Kézenfekvő a szinusz- és koszinuszfüggvények Maclaurin-sorait valahogyan felhasználni a megoldásban. Súlyos hiba viszont arra gondolni, hogy e függvények Maclaurin-együtthatóinak szorzata egyből megadja a szorzatfüggvény Maclaurin-együtthatóit. A két Maclaurin-sor *Cauchy-szorzatának* kiszámítása már jó gondolat, de kissé nehézkes a gyakorlatban: a következő meggondolás sokkal egyszerűbb. Vegyük észre, hogy:

$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

Így a feladat a szinuszfüggvény ismert Maclaurin-sorára vezethető vissza:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...,$$

$x$ helyére szisztematikusan $2x$-et írva:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \frac{2^7}{7!}x^7 + \ldots\right) =$$

$$= x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \ldots$$

A sor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén konvergens.

8-12 **Megoldás:**

Célszerűnek látszik a feladat visszavezetése más, már ismert Maclaurin-sorokra. Kézenfekvő a szinusz- és/vagy a koszinuszfüggvény Maclaurin-sorát valahogyan felhasználni a megoldásban. Súlyos hiba viszont arra gondolni, hogy a szinuszfüggvény Maclaurin-együtthatói négyzete egyből megadja az $x \mapsto \sin^2 x$ függvény Maclaurin-együtthatóit. A szinuszfüggvény Maclaurin-sorának önmagával vett *Cauchy-szorzatának* kiszámítása már jó gondolat, de kissé nehézkes a gyakorlatban: a következő meggondolás ennél egyszerűbb. Használjuk fel az alábbi ismert trigonometrikus azonosságokat: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, és $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Innen:

$\cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

ahonnan $\sin^2 x$ kifejezhető:

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Elég tehát az $x \mapsto \cos 2x$ függvény Maclaurin-sorát ismerni, ami azonnal adódik az $x \mapsto \cos x$ függvény ismert Maclaurin-sorából:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \ldots,$$

$x$ helyére szisztematikusan $2x$-et írva:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \ldots$$

Innen pedig $\sin^2 x$ Maclaurin-sora adódik:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \ldots\right) =$$

$$= \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$$

8-13 **Megoldás:**

**Megoldás:** Mivel $\dfrac{1}{\sqrt{6}} = 6^{-\frac{1}{2}}$, ezért a binomiális sorból indulhatunk ki, mely szerint

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot x^3 + \ldots$$

Nyilvánvaló, hogy most $\alpha$ helyére $\dfrac{1}{2}$ kerül majd. Egyszerűnek tűnne, hogy az $x$ helyére pedig kerüljön $5$, azonban ez nem járható út, mert a sor csak $|x| < 1$ esetén konvergens. Ezért alakítsuk át kissé a közelítendő számot.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \frac{6}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot (1.5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (1+0.5)^{-\frac{1}{2}}$$

Így tulajdonképpen az $(1.5)^{-\frac{1}{2}}$ közelítő értékét kell meghatároznunk, majd azt $\dfrac{1}{2}$-del szorozni. Így már nincs baj a konvergenciával, hisz ha $1 + x = 1.5$, akkor $x = 0.5$, s ez eleget tesz az $|x| < 1$ feltételnek, ami konvergenciához szükséges. Elhagyva a harmadfokúnál magasabb fokú tagokat, egy közelítő értéket kapunk:

$$(1.5)^{-\frac{1}{2}} = (1+0.5)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{(-0.5)}{1!} \cdot 0.5 + \frac{(-0.5)(-0.5-1)}{2!} \cdot (0.5)^2 + \frac{(-0.5)(-0.5-1)(-0.5-2)}{3!} \cdot (0.5)^3 = 0.8046875$$

Majd térjünk vissza a eredeti kérdéshez.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \approx \frac{1}{2} \cdot 0.8046875 = 0.40234375$$

Ha egy jobb számológép is rendelkezésünkre áll, akkor azzal az $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.40824829$ közelítő értéket kapjuk.

Látható, hogy az általunk számolt közelítés elég pontatlan, ami annak tudható, hogy csak harmadfokú közelítést használtunk, és $|x|$ sem eléggé kicsi.

Megjegyezzük, hogy a feladatot máshogyan (és valamivel pontosabban) is megoldhattuk volna, ha a közelítendő számot másképp alakítjuk át. Tekintsük a következő átalakítást.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot \frac{6}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ezután ugyanúgy járhatnánk el, mint a fenti megoldásban, csak most $x$ helyére $-\frac{1}{3}$ -ot kellene helyettesíteni. Ez a pontosság szempontjából még kedvezőbb is lenne, hiszen így $|x|$ kisebb, ezáltal jobb közelítést várhatunk. Javasoljuk, hogy az Olvasó fejezze be a részletszámításokat, és hasonlítsa össze az eredményt a korábban nyert közelítéssel, és kísérletezzen magasabb fokszámú Maclaurin-polinomok használatával is.

# 23. lecke

# A primitív függvény (határozatlan integrál)

# 9. Primitív függvény és Riemann-integrál

Ebben a fejezetben a differenciálás műveletének megfordításáról lesz szó: a deriváltfüggvény ismeretében keressük az eredeti függvényt. Ezután értelmezzük a folytonos függvények grafikonja alatti területet. Megmutatjuk, hogy – az egészen különböző származtatás ellenére – a két fogalom szoros kapcsolatban áll egymással.

## 9.1. A primitív függvény

Először a bevezetőben említett első problémával foglalkozunk. Legyen $(a,b) \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges nyílt (nem feltétlen korlátos) intervallum.

**9-1. Definíció:** Az $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ függvény *primitív függvényén* olyan $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényt értünk, melyre $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in (a,b)$ pontban.

Ilyen függvény – ha létezik egyáltalán – több is van, amint a következő állítás mutatja.

**9-1. Állítás:** A függvényt a deriváltja additív konstans erejéig egyértelműen határozza meg, azaz, ha $F$ és $G$ olyan, az $(a,b)$ intervallumon differenciálható függvények, melyekre $F' \equiv G'$ teljesül az $(a,b)$ intervallumon, akkor van olyan $C \in \mathbf{R}$ szám, hogy $F(x) = G(x) + C$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

**Bizonyítás:**

Jelölje $H := F - G$, akkor nyilván $H' \equiv 0$, ezért $H$ azonosan konstans függvény (7-22. Állítás): $H \equiv C$, alkalmas $C \in \mathbf{R}$ esetén, ahonnan az állítás már következik. $\square$

A 9-1. Állítás szerint egy intervallumon adott függvénynek a primitív függvénye csak additív állandó erejéig meghatározott. Ha $F$ primitív függvénye $f$-nek, akkor minden $C \in \mathbf{R}$ esetén $F + C$ is az, továbbá $f$ minden primitív függvénye előáll ilyen alakban. Az $f$ függvény primitív függvényének jelölésére az $\int f$ („integrál f”) vagy az $\int f(x)\,dx$ szimbólumok valamelyikét használjuk. Ez utóbbi jelölés akkor kényelmes, ha $f$-et formulával adjuk meg, és nem akarunk külön jelet bevezetni a függvényre; pl. $\int(3x^2+1)\,dx$. Felhívjuk a figyelmet, hogy ebben a jelölésben $\int \dots dx$ *összetartozó szimbólumok*, és „$dx$” *nem* szorzást jelöl.

A primitív függvényt sokszor az $f$ függvény *antideriváltjának* vagy *határozatlan integráljának* is nevezik. (Néha $f$ összes primitív függvényeinek halmazát nevezik határozatlan integrálnak, de ez nem okoz félreértést, mert a fentiek szerint ezek csak additív állandóban különbözhetnek). Az „integrálni” kifejezést a „primitív függvényt venni” értelemben használjuk. Az $\int f$ jelölésben az $f$ függvényt magát *integrandusnak* is nevezzük. Megjegyezzük még, hogy a 9-1. Állításból még *nem* következik, hogy egy adott $f$ függvénynek létezik is primitív függvénye. Erre vonatkozó tételt csak később tudunk igazolni.

A derivált alaptulajdonságaiból azonnal adódnak a primitív függvényekre vonatkozó alábbi alapvető állítások:

**9-2. Állítás:** Ha $f,g : (a,b) :\to \mathbf{R}$ függvényeknek van primitív függvényük, akkor az $(f+g)$, $(f-g)$ és a $c\cdot f$ függvényeknek is van (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám), éspedig
$(a)$ $\int(f \pm g) = \int f \pm \int g$
$(b)$ $\int(cf) = c \cdot \int f$ minden $c \in \mathbf{R}$ esetén.

Sajnos a szorzatfüggvény primitív függvényére nincs a deriválási szabályokhoz hasonló összefüggés. Mindenesetre, az elemi függvények deriváltjainak felhasználásával már egy sor függvény primitív függvénye meghatározható. Ezeket tartalmazza az 1. táblázat (az *alapintegrálok táblázata*). A függvények helyességét deriválással ellenőrizhetjük. Külön kiemeljük, hogy az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény primitív függvénye $x \mapsto \log x$ vagy $x \mapsto \log(-x)$ aszerint, hogy az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt a $(0,+\infty)$ vagy a $(-\infty,0)$ intervallumon értelmezzük.

| $f(x)$ | Értelmezési tartomány | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| $x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$ | $(0, +\infty)$ | $\frac{1}{\alpha}x^{\alpha+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $(0, +\infty)$ | $\log x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $(-\infty,0)$ | $\log(-x)$ |
| $e^x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $e^x$ |
| $a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ | $(-\infty, +\infty)$ | $\frac{1}{\log a}a^x$ |
| $\sin x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $\sin x$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $(-\infty, +\infty)$ | arctg $x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,1)$ | arcsin $x$ |
| sh $x$ | $(-\infty, +\infty)$ | ch $x$ |
| ch $x$ | $(-\infty, +\infty)$ | sh $x$ |

1. táblázat. *Az alapintegrálok táblázata*

## 9.2. Tippek és trükkök a primitív függvény meghatározására

Most néhány olyan hasznos fogást mutatunk, amellyel bizonyos speciális alakú függvények primitív függvénye meghatározható. A formulák mindegyike deriválással egyszerűen ellenőrizhető, így a bizonyításoktól eltekintünk.

**9-3. Állítás:** Ha $f$ differenciálható az $I$ intervallumon, és $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C = \begin{cases} \log f(x) + C\,, & \text{ha } f(x) > 0 \\ \log(-f(x)) + C\,, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

**9-4. Állítás:** Ha $f$ differenciálható az $I$ intervallumon, akkor

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C.$$

**9-5. Állítás:** Ha az $f$ függvénynek az $I$ intervallumban egy primitív függvénye $F$, akkor

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \qquad (ax+b \in I)$$

tetszőleges $a,b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ szám esetén.

A fenti állításokat az alábbi példákon illusztráljuk.

**9-1. Példa:** $(a)$ A $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C.$$

$(b)$ Tetszőleges $I$ intervallumon

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx = \int \sin x\,dx - \int \sin x\cos^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$(c)$ A $\left(-\frac{2}{5},+\infty\right)$ intervallumon

$$\int \sqrt{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\int 5\sqrt{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+2)^{3/2} + C.$$

Sokszor azonban a fenti trükkök alkalmazása sem elég. Általában elmondható, hogy a primitív függvény meghatározására általános recept nincs, egy-egy konkrét eset akár több integrálási módszer alkalmazását is szükségessé teheti. Ilyen esetekben különösen hasznos lehet a szimbolikus programcsomagokba (pl. MAPLE) beépített tudásanyag.

Most két, elég általánosan használható integrálási módszert mutatunk.

*Parciális integrálás*

9-6. Állítás: Ha $u$, $v$ olyan differenciálható függvények, hogy $u'v$-nek van primitív függvénye, akkor $uv'$-nek is van primitív függvénye, és

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Bizonyítás:

A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó $(uv)' = u'v + uv'$ összefüggésből $uv' = (uv)' - u'v$. Mindkét oldalt integrálva, az állítás adódik. $\square$

A parciális integrálás nem közvetlenül az $uv'$ függvény primitív függvényt szolgáltatja, hanem a problémát *visszavezeti egy másik primitív függvény* (nevezetesen $u'v$ primitív függvényének) *kiszámítására*. Természetesen a módszert akkor célszerű alkalmazni, ha ez a másik primitív függvény az eredetinél egyszerűbben határozható meg.

Az, hogy az integrandust hogyan bontjuk fel $uv'$ szorzatra, nem mindig látható és nem is mindig egyértelmű, ehhez bizonyos gyakorlatra van szükség. A módszert néha egymás után többször is kell alkalmazni, ill. kombinálni más integrálási módszerekkel. Jellegzetes alkalmazási lehetőségeket az alábbi példákon keresztül mutatunk be.

9-2. Példa: $\int x \cdot \sin x \, dx = ?$

*Megoldás*. Próbálkozzunk először az alábbi szereposztással: $u(x) := \sin x$ és $v'(x) := x$. Ekkor $u'(x) = \cos x$ és $v(x) = \frac{x^2}{2}$. A parciális integrálás formulája szerint

$$\int x \cdot \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx,$$

de a jobb oldali integrál még bonyolultabb lett az eredetinél. Így ez a szereposztás nem vezet célra. Próbálkozzunk a fordított szereposztással: $u(x) := x$ és $v'(x) := \sin x$. Ekkor $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos x$, így

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x + \int 1 \cdot \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

A kapott eredmény deriválással ellenőrizhető:

$$(-x \cos x + \sin x)' = -1 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + \cos x = x \cdot \sin x.$$

Ha tehát az egyik tényező polinom, akkor célszerű azt $u$-nak választani, mert a deriváláskor annak fokszáma csökken.

Magasabb fokszámú polinomok esetén a módszert többször is kell alkalmazni, mint azt az alábbi példa is mutatja.

**9-3. Példa:** $\int x^2 e^{3x} \, dx =?$

*Megoldás*. Legyen $u(x) := x^2$ és $v'(x) := e^{3x}$, ekkor $u'(x) = 2x$ és $v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$. Ezért

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} \, dx.$$

A jobb oldalon ismét parciálisan integrálunk $u(x) := x$, $v'(x) := e^{3x}$ szereposztással. Ekkor $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$, ahonnan

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx \right) = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

A példát általánosítva, könnyen látható, hogy egy $n$-edfokú polinom és egy exponenciális (vagy trigonometrikus) függvény szorzatának integrálása $n$ db parciális integrálási lépésen keresztül valósítható meg.

Néha segít, ha $u$-nak magát az integrandust, $v'$-nek pedig az azonosan 1 függvényt választjuk.

**9-4. Példa:** $\int \log x\,dx = ?$

*Megoldás.* Az $u(x) := \log x$, $v'(x) := 1$ választással $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$, így

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\log x - x + C.$$

*Integrálás helyettesítéssel*

**9-7. Állítás:** Legyenek $I, J \subset \mathbf{R}$ intervallumok. Legyen az $f : J \to \mathbf{R}$ függvény egy primitív függvénye az $F : J \to \mathbf{R}$ függvény. Ha $g : I \to J$ egy differenciálható függvény, akkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek van primitív függvénye, és

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$$

**Bizonyítás:**

Az összetett függvény deriválására vonatkozó

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = F'(g(x))g'(x)$$

egyenlőségből:

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = f(g(x))g'(x)$$

Integrálva mindkét oldalt, az állítás adódik. □

A tétel gyakorlati alkalmazásában a következő, nem egészen korrekt, de könnyen megjegyezhető eljárást szokták ajánlani. Vezessünk be egy új változót: $t := g(x)$. Ennek deriváltja $\frac{dt}{dx} = g'(x)$. Formálisan átszorozva $dx$-szel, kapjuk, hogy $dt = g'(x)\,dx$. Ezt, valamint $g(x)$ helyébe $t$-t helyettesítve

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) = F(g(x)),$$

az előző állítással egyezésben.

A módszert az alábbi példán illusztráljuk.

**9-5. Példa:** $\int xe^{-x^2}\,dx = ?$

*Megoldás*. Legyen $t := x^2$, akkor $dt = 2x\,dx$. Innen

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C,$$

melynek helyessége deriválással könnyen ellenőrizhető.

Sokszor célszerűbb az állítás alábbi változatát használni. Tekintsük a $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$ egyenlőséget valamilyen $g^{-1}(x)$ helyen (feltéve persze, hogy a $g^{-1}$ inverz függvény létezik). A bal oldali $(f \circ g)g'$ integrandus egy primitív függvényét $H$-val jelölve, kapjuk, hogy $F(x) = H(g^{-1}(x))$. A következő állítást nyertük:

**9-8. Következmény:** Legyenek $I, J \subset \mathbf{R}$ intervallumok. Ha $g : I \to J$ egy olyan differenciálható függvény, melynek $g^{-1}$ inverze létezik, továbbá az $f : J \to \mathbf{R}$ függvény olyan, hogy a $(f \circ g)g'$ függvénynek van primitív függvénye, akkor $f$-nek is van primitív függvénye, és

$$\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x)),$$

ahol $H$ jelöli $(f \circ g)g'$ egy primitív függvényét.

Az állítás tehát az $f$ függvény primitív függvényének megkeresését visszavezeti az $(f \circ g)g'$ függvény primitív függvényének megkeresésére. A módszer a gyakorlatban akkor használható, ha ez utóbbi feladat már egyszerűbb az eredetinél.

A fenti következmény látszólag a megelőző állítás egy variánsa. Különbség van azonban a gyakorlati alkalmazás terén, melyet a fentebb leírt formalizmus könnyen áttekinthetővé és megjegyezhetővé tesz. Szemben az előző megközelítéssel, amikor a $g$ függvényt helyettesítettük új változóval, most az $x$ változó helyett vezetünk be egy új függvényt: $x := g(t)$. Deriválva: $dx = g'(t)\,dt$, továbbá nyilván $t = g^{-1}(x)$. Ezeket behelyettesítve az eredeti integrálba, kapjuk, hogy

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = H(t) = H(g^{-1}(x)),$$

a fenti következménnyel egyezésben.

**9-6. Példa:** Tekintsük ismét az $\int xe^{-x^2}\,dx$ integrált. Legyen $t := x^2$, innen $x = \sqrt{t}$ ($g$ szerepét most a gyökfüggvény játssza: $g(t) = \sqrt{t}$). Deriválva: $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, azaz

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C.$$

Végül vissza kell térni a régi változóhoz, azaz a jobb oldali kifejezést a $t = g^{-1}(x) = x^2$ helyen vesszük, innen:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

A következő példában a helyettesítést és a parciális integrálást együttesen kell alkalmazni.

**9-7. Példa:** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = ?$

*Megoldás*. Helyettesítsünk: legyen $t := \sqrt{x}$, akkor $x = t^2$, és $dx = 2t\,dt$. Innen $\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\int e^t \cdot t\,dt$. A jobb oldalon parciálisan integrálunk az $u(t) := t$, $v'(t) := e^t$ szereposztással. Innen $u'(t) = 1$, $v(t) = e^t$, ezért

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot \left( t \cdot e^t - \int e^t\,dt \right) = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

*Racionális törtfüggvények integrálása*

Végül röviden vázoljuk *racionális törtfüggvények* (azaz két polinom hányadosaként kifejezhető függvények) integrálási technikáját. Nem törekszünk teljes általánosságra, csak valós együtthatós polinomokat tekintünk, és csak azt az esetet vizsgáljuk, mikor a nevező legfeljebb másodfokú polinom. *Feltesszük, hogy a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál*, ellenkező esetben egyszerű algebrai műveletekkel (nevezetesen: maradékos osztással) elérhető, hogy az integrandus egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként álljon elő, ahol a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál. Az algoritmust az alábbi példával szemléltetjük: az eljárás könnyen általánosítható tetszőleges polinomok esetére.

9-8. Példa: Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi formulával értelmezett racionális törtfüggvényt (azaz osszuk el maradékosan a számlálót a nevezővel):

$$f(x) := \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + x + 3}.$$

*Megoldás*. A hányadospolinom legmagasabb fokú tagját a számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjainak hányadosa adja. Esetünkben ez $x$. A maradékot visszaszorzással és különbségképzéssel kapjuk:

$$\frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + x + 3} = x + \frac{(x^3 + 5x - 1) - x \cdot (x^2 + x + 3)}{x^2 + x + 3} = x + \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 3}$$

A jobb oldali második törtkifejezésben a számlálója már csak másodfokú. A hányados tehát $\frac{-x^2}{x^2} = -1$, a maradékot ugyanúgy kapjuk, mint az előző lépésben:

$$\frac{x^3+5x-1}{x^2+x+3} = x-1+\frac{(-x^2+2x-1)-(-1)\cdot(x^2+x+3)}{x^2+x+3} = x-1+\frac{3x+2}{x^2+x+3}.$$

Előállítottuk tehát a kiindulási törtfüggvényt egy elsőfokú polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként, ahol a számláló már határozottan kisebb fokszámú, mint a nevező. Figyeljük meg, hogy az algoritmus az egész számok jól ismert osztási algoritmusának pontos megfelelője.

1. Elsőfokú nevező: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx$$

*Megoldás*. Az integrál a 9-3. Állítás segítségével azonnal meghatározható:

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \log|x+a| + C.$$

**9-9. Példa:**

$$\int \frac{1}{2x+6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+3| + C$$

minden olyan intervallumon, amely a $(-3)$ számot nem tartalmazza.

2. Másodfokú nevező: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{x+a}{x^2+px+q}\,dx$$

Feltehető, hogy a számláló konstans. Ellenkező esetben az integrandus két olyan törtkifejezés összegére bontható, hogy az elsőben a számláló épp a nevező deriváltja (így a 9-3. Állítás alkalmazható), a másodikban pedig a számláló konstans:

$$\int \frac{x+a}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \frac{-p+2a}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log|x^2+px+q| + \frac{-p+2a}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx,$$

így elég a jobb oldali második integrált meghatározni. Az alkalmazott integrálási technika *a nevező valós gyökeinek számától* függ, az alábbiakban ezeket részletezzük.

2a. *Nincs valós gyök*, azaz $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Ekkor a nevező teljes négyzetté alakítható:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})}\,dx =: \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + c^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right)^2 + 1}\,dx.$$

Alkalmazzuk a $t := \frac{x+\frac{p}{2}}{c}$ helyettesítést, innen $dx = c\,dt$, és ezért

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{c}\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{1}{c}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right) + C,$$

ahol tehát $c^2 := q - \frac{p^2}{4}$.

9-10. Példa: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$$

*Megoldás*. A nevezőnek nincs valós gyöke, és teljes négyzetté alakítható, innen

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx.$$

Alkalmazzuk a $t := \frac{x+2}{3}$ helyettesítést. Innen $dx = 3\,dt$, és

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$$

2b. *Egyetlen valós gyök van*, azaz $\frac{p^2}{4} - q = 0$. Ekkor a nevező a gyöktényező négyzete, a primitív függvény pedig azonnal adódik:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2}\,dx = -\frac{1}{x+\frac{p}{2}} + C.$$

9-11. Példa: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$$

*Megoldás*. A nevezőnek egyetlen valós gyöke van, a $(-2)$. Ezért:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} + C.$$

2c. *Két különböző valós gyök van*, azaz $\frac{p^2}{4} - q > 0$. Ekkor a nevező két különböző gyöktényező szorzata:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx,$$

ahol $x_1$,$x_2$ a nevező gyökei.

Közös nevezőre hozással könnyen ellenőrizhető az alábbi algebrai átalakítás helyessége:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right),$$

azaz az integrál két 1. típusú integrál összegére bomlik. Az integrálás most már nehézség nélkül elvégezhető:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\int \frac{1}{x-x_1}\,dx - \int \frac{1}{x-x_2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\log\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C.$$

Megjegyzés: Az iménti algebrai átalakítást a *parciális törtekre bontás* módszerének nevezik. Az átalakítás algoritmusa az alábbi módon is megjegyezhető, ill. alkalmazható. Próbáljuk meg az $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ törtkifejezést két egyszerűbb tört *összegeként* előállítani:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

ahol $A$, $B$ egyelőre ismeretlen számok. A jobbooldalt közös nevezőre hozva kapjuk, hogy:

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x + (-Ax_2 - Bx_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

A kifejezés biztosan azonosan egyenlő a kiindulási $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ törtkifejezéssel, ha

$$A + B = 0, \qquad -Ax_2 - Bx_1 = 1.$$

Megoldva ezt a kétismeretlenes egyenletrendszert, $A$, $B$ meghatározható.
Az eljárás könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, ha a nevező elsőfokúnál magasabb fokú polinomok szorzata.

9-12. Példa: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 5}\, dx$$

*Megoldás*. A nevezőnek két különböző valós gyöke van, éspedig a $(-5)$ és az $1$. A nevező gyöktényezős alakja tehát $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$. Bontsuk az $\frac{1}{(x+5)(x-1)}$ kifejezést parciális törtek összegére:

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1},$$

ahol $A$, $B$ egyelőre ismeretlenek. A jobb oldalt közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + 5B}{(x+5)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (-A+5B)}{(x+5)(x-1)}.$$

Az így kapott kifejezés biztosan egyenlő $\frac{1}{(x+5)(x-1)}$-gyel, ha $A + B = 0$, és $-A + 5B = 1$. Megoldva ezt az egyenletrendszert, kapjuk, hogy $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$. Innen tehát

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+5}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C$$

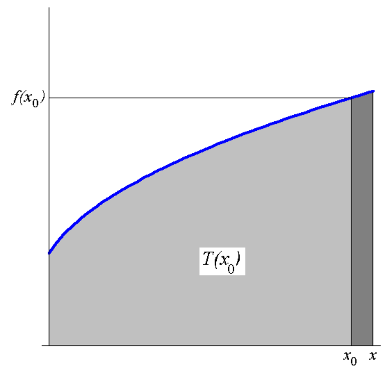
minden olyan intervallumon, amely sem az $1$, sem a $(-5)$ számot nem tartalmazza.

# 24. lecke

# A Riemann-integrál (határozott integrál)

## 9.3. A Riemann-integrál

Ebben a szakaszban a primitív függvény megkeresésének egy általános módszerét építjük fel. Az elv, nagy vonalakban, az alábbi lesz. Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos és (egyelőre) nemnegatív függvény, és jelölje $T(x)$ az $f$ függvény grafikonja alatti területet az $a$ és valamely $x \in [a,b]$ hely közt.




42. ábra. A $T$ területfüggvény és megváltozása

Akkor tetszőleges $a \le x_0 < x \le b$ mellett a $T(x) - T(x_0)$ különbség nyilván a grafikon alatti terület az $x_0$ és az $x$ helyek közt, és ez, szemléletesen láthatóan, „körülbelül” az $f(x_0) \cdot (x - x_0)$ értékkel egyezik, ha $x$ „elég közel” van $x_0$-hoz. Ez esetben tehát

$$\frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} \approx f(x_0).$$

Várható ezért, hogy $x \to x_0$ esetén a bal oldal $f(x_0)$-hoz tart. Ha ez valóban így van, akkor $T'(x_0) = f(x_0)$ minden $x_0 \in [a,b]$ esetén, azaz a $T$ területfüggvény primitív függvénye $f$-nek $[a,b]$-n. Ahhoz, hogy ezt igazolni tudjuk, az intuitív területfogalmat kell pontosítani. Ezt tesszük meg a következőkben. A szigorú tárgyalás meglehetősen nehéz, ezért ahol csak lehet, igyekezünk szemléletes fogalmakkal dolgozni, részben feláldozva a szabatosságot.

*Integrálközelítő összegek*

Legyen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ korlátos intervallum, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ pedig egy egyelőre tetszőleges függvény.

**9-2. Definíció:** Az $[a,b]$ intervallum egy *felbontásán* (vagy *felosztásán*) egy $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ véges sorozatot értünk. Jelölje a továbbiakban $h_k := x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2,...,N)$. A felbontás *finomságának* a $\delta_N := \max_{1 \leq k \leq N} h_k$ számot, azaz a maximális hosszúságú részintervallum hosszát nevezzük. Azt mondjuk, hogy a felbontások egy sorozata *korlátlanul finomodó*, ha a megfelelő $\delta_N$ számok sorozata zérussorozat, azaz $\delta_N \to 0$ $(N \to +\infty)$.

Most definiálunk két nagyon szemléletes fogalmat, melyek a görbe alatti terület fogalmának megalapozásához szükségesek.

**9-3. Definíció:** Legyen $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felbontása. Az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény ezen felbontáshoz tartozó *alsó integrálközelítő összegén* az

$$S_-^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^{N} f_k^{\min} \cdot h_k$$

számot, *felső integrálközelítő összegén* pedig az

$$S_+^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^{N} f_k^{\max} \cdot h_k$$

számot értjük, ahol $f_k^{\min}$ ill. $f_k^{\max}$ jelöli az $f$ függvénynek az $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumon felvett minimális ill. maximális értékét (feltéve, hogy ezen értékek léteznek).

43. ábra. Alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha pl. az $f$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor a definícióban szereplő $f_k^{\min}$, $f_k^{\max}$ Weierstrass tétele értelmében mindig léteznek, ekkor tehát a definíció mindig értelmes. Nyilvánvaló, hogy minden felbontás esetén teljesül, hogy

$$S_-^{(N)}(f) \le S_+^{(N)}(f).$$

**9-4. Definíció:** Az $S_-(f) := \sup S_-^{(N)}(f)$ (ill. az $S_+(f) := \inf S_+^{(N)}(f)$) számot az $f$ függvény *alsó integráljának* (ill. *felső integráljának*) nevezzük, ahol az infimum és szuprémum az $[a,b]$ intervallum összes felbontására vonatkozik.

Nyilvánvaló, hogy minden $f$ függvény és minden felbontás esetén

$$S_-^{(N)}(f) \le S_-(f) \le S_+(f) \le S_+^{(N)}(f).$$

**9-5. Definíció:** Azt mondjuk, hogy az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény *Riemann-integrálható*, vagy röviden: *integrálható*, ha az alsó és felső integrálja megegyezik. Ekkor ezt a közös értéket $f$-nek az $[a,b]$ intervallumon vett *Riemann-integráljának* (vagy *határozott integráljának*) nevezzük, és az $\int_a^b f$ vagy az $\int_a^b f(x)dx$ szimbólummal jelöljük.

A primitív függvényhez hasonló elnevezés és jelölés indokoltságát a következő szakaszban fogjuk látni. Kiderül, hogy a teljesen különböző származtatás ellenére a Riemann-integrál és a primitív függvény igen szoros kapcsolatban állnak egymással.

Nyilvánvaló, hogy minden Riemann-integrálható $f$ függvény és minden felbontás esetén

$$S_{-}^{(N)}(f) \leq \int_a^b f \leq S_{+}^{(N)}(f),$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy a Riemann-integrál az intuitív „görbe alatti terület” pontos megfelelője. Valóban, a szóban forgó síkbeli halmaz (melyet tehát az $f$ függvény grafikonja, az $x$ tengely valamint az $x = a$ és $x = b$ függőleges egyenesek határolnak) minden alsó integrálközelítő összeget reprezentáló téglalap-együttesnél csak bővebb, és minden felső integrálközelítő összeget reprezentáló téglalap-együttesnél csak szűkebb lehet, így területe az alsó és felső integrálközelítő összegek közé kell, hogy essék.

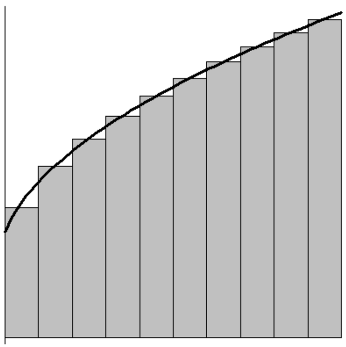
Egyáltalán nem magától értetődő, hogy az alsó és felső integrál minden függvény esetén megegyezne. Ez valóban nincs így. Ellenpéldaként tekintsük pl. a $[0,1]$ intervallumon értelmezett *Dirichlet-függvényt* (mely minden racionális számhoz 1-et és minden irracionális számhoz 0-t rendel). Könnyen látható, hogy ennek minden alsó integrálközelítő összege (és ezért alsó integrálja is) 0-val, és minden felső integrálközelítő összege (és ezért felső integrálja is) 1-gyel egyenlő. Ez a függvény tehát nem Riemann-integrálható. Azonban a legtöbb általunk már ismert függvény az. Triviális példa erre a konstans függvény. Az alábbi állítás igazolását az Olvasóra bízzuk.

**9-13. Példa:** Az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) \equiv c$ függvény (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám) Riemann-integrálható, éspedig $\int_a^b f = c \cdot (b - a)$.

Látni kell azonban azt, hogy a Riemann-integrál pontos kiszámítására a definíció a legtöbbször teljesen alkalmatlan. Közelítő meghatározása azonban – elvileg – igen könnyű. Tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ felbontását. Minden $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumban vegyünk fel egy tetszőleges $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ pontot, és készítsük el a

$$\sigma_N := \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k$$

összeget (*Riemann-összeg* vagy *téglányösszeg*).



44. ábra. Egy Riemann-összeg

Megmutatható (de nem bizonyítjuk), hogy *az $f$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha minden korlátlanul finomodó felbontássorozat esetén a megfelelő Riemann-összegek sorozata a felbontástól és a $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ pontok választásától függetlenül konvergens, éspedig ugyanahhoz a számhoz tart. Ekkor ez a közös határérték az $\int_a^b f$ Riemann-integrállal egyezik.*

Röviden (bár nem egészen pontosan) tehát

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k \to \int_a^b f, \quad \text{ha} \quad \delta_N = \max_{1\leq k\leq N} h_k \to 0.$$

Következésképp minden, elég finom felbontás esetén egy tetszőleges Riemann-összeg a Riemann-integrált jól közelíti. A közelítés hibája azonban nehezen becsülhető, ehhez az $f$ függvénytől többet kell megkövetelni, pl. azt, hogy $f$ elégítse ki a Lipschitz-feltételt (ld. alább).

A Riemann-összegek definíciójából nyilvánvaló, hogy egy adott felbontáshoz tartozó tetszőleges Riemann-összeg tetszőleges alsó és felső integrálközelítő összegek közé esik, azaz

$$S_-^{(N)}(f) \leq \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k \leq S_+^{(N)}(f).$$

Megjegyezzük még, hogy a Riemann-integrál szemléletes jelentése *előjeles terület*, azaz negatív értékű függvények esetében a görbe alatti (helyesebben: a görbe *feletti*) területhez negatív előjel járul.

Felvetődik a kérdés, hogy miféle feltételek biztosítják egy függvény Riemann-integrálhatóságát. A következő állítás azt mutatja, hogy ehhez elegendő, ha a függvény kielégíti a Lipschitz-feltételt (amiből a folytonosság már következik).

**9-9. Állítás:** Ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényhez van olyan $C \geq 0$ szám, hogy minden $x,y \in [a,b]$ esetén teljesül az $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|$ becslés, akkor $f$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

**Bizonyítás:**

Tekintsük $[a,b]$-nek egy $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ felbontását. Akkor a felső és alsó integrálközelítő összegek különbségére teljesül, hogy

$$0 \leq S_+^{(N)} - S_-^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} (f_k^{\max} - f_k^{\min}) \cdot h_k \leq \sum_{k=1}^{N} C|x_k - x_{k-1}| \cdot h_k =$$

$$= C \cdot \sum_{k=1}^{N} h_k^2 \leq C \cdot \max_{1 \leq k \leq N} h_k \cdot \sum_{k=1}^{N} h_k = C \cdot \delta_N \cdot (b-a).$$

Tekintsünk felbontásoknak egy korlátlanul finomodó sorozatát. Ekkor $\delta_N \to 0$ miatt a jobb oldal zérushoz tart, ami azt jelenti, hogy egymáshoz tetszőlegesen közeli alsó és felső integrálközelítő összegek léteznek. Innen $S_-(f) = S_+(f)$ már következik, azaz $f$ valóban Riemann-integrálható $[a,b]$-n. □

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás bizonyítása egyúttal egy hibabecslést is szolgáltat a Riemann-összegekre nézve. Valóban, mivel mind a Riemann-integrál, mind pedig egy tetszőleges Riemann-összeg az alsó és felső integrálközelítő összegek közé esnek, azért

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k \right| \leq S_+^{(N)} - S_-^{(N)} \leq C \cdot \delta_N \cdot (b-a),$$

tehát a Riemann-összeg és a Riemann-integrál eltérése pusztán a felbontás finomságával és a Lipschitz-konstanssal megbecsülhető.

Lényegében a fenti állítás bizonyításának technikájával mutatható meg az is, hogy ha *$f$ monoton és korlátos az $[a,b]$ intervallumon, akkor ott Riemann-integrálható is*.

A fenti állításnál sokkal erősebb tétel (bizonyításához eddigi eszköztárunk nem elegendő), hogy a Riemann-integrálhatóságot már a *folytonosság* is biztosítja.

9-10. Tétel: Minden, az $[a,b]$ korlátos intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható is $[a,b]$-n.

Megjegyezzük még, hogy az integrálfogalom sokkal tágabb függvényosztályra is kiterjeszthető. Így pl. elegendő a szakaszonkénti folytonosság, tehát az integrandusnak (véges sok pontban) ugrása is lehet, az integrál pedig az egyes részintervallumokon vett integrálok összegével egyezik. Igazolható továbbá, hogy ha az integrandus értékét *véges sok* pontban tetszőlegesen megváltoztatjuk, ez sem az integrálhatóságot, sem pedig az integrál értékét nem befolyásolja. Az integrálfogalom kiterjesztésének részleteivel azonban (a később tárgyalandó improprius integrál kivételével) e jegyzet keretein belül nem foglalkozhatunk.

A következő tételben összefoglaljuk a Riemann-integrál alaptulajdonságait. Mindegyik állítás egyszerűen belátható a Riemann-összegekre való áttéréssel a határértékekre vonatkozó összefüggéseket alkalmazva, így a bizonyításokat elhagyjuk.

**9-11. Tétel:** Legyenek $f,g : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható függvények. Akkor
$(a)$ $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$,
$(b)$ $\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$,
$(c)$ $\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$ tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ esetén,
$(d)$ ha $f \le g$ teljesül $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f \le \int_a^b g$,
$(e)$ $\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^b f$.

**Megjegyzés:** Definíció szerint legyen mindig $\int_a^a f := 0$ (a szemlélettel teljes összhangban), továbbá, ha $b < a$, akkor *jelölje* $\int_a^b f := -\int_b^a f$. Ezekkel a megállapodásokkal az előző Tétel $(e)$ állítása akkor is teljesül, ha az $\alpha$ szám nem feltétlen esik bele az $[a,b]$ intervallumba (feltéve, hogy $f$ az itt előforduló, az $[a,b]$ intervallumnál bővebb $[\alpha,b]$ ill. $[a,\alpha]$ intervallumon integrálható.

A szakasz végén még egyszer hangsúlyozzuk, hogy eddigi eszközeink birtokában egy-egy konkrét függvény Riemann-integráljának kiszámítása még mindig nagyon nehézkes, bár elvileg tetszőleges pontossággal meghatározható (pl. a Riemann-összegek segítségével). A következő szakaszban megmutatjuk, hogy az $f$ függvény egy *primitív függvényének* ismeretében a Riemann-integrál meghatározása már igen egyszerű. Ez egyúttal kapcsolatot is jelent a differenciálszámítás és a Riemann-integrál mindeddig teljesen különbözőnek tűnő területei között.

## 9.4. Az integrálszámítás középértéktétele és a Newton–Leibniz-tétel

**9-12. Tétel:** (az integrálszámítás középértéktétele). Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos (így Riemann-integrálható) függvény, akkor van (legalább egy) olyan $\xi \in [a,b]$ pont, melyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

**Bizonyítás:**

Jelölje $m := \min_{a\le x\le b} f(x)$, és $M := \max_{a\le x\le b} f(x)$ (e számok Weierstrass tétele értelmében jól definiáltak). Könnyen látható, hogy $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, azaz

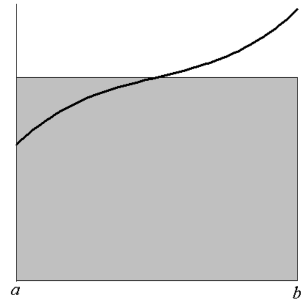
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Bolzano tétele miatt tehát létezik olyan $\xi \in [a,b]$ hely, ahol az $f$ függvény a $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ értéket veszi fel. $\square$

A tételben szereplő $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ számot az $f$ függvénynek az $[a,b]$ intervallumra vonatkozó *integrálközepének* nevezzük.

A tétel igen szemléletes. Azt fejezi ki, hogy a görbe alatti terület *pontosan* egyenlő egy olyan téglalapnak a területével, melynek egyik oldala maga az $[a,b]$ intervallum, másik oldala pedig valamilyen „közbenső” $f(\xi)$ függvényérték (ld. a 9.4. ábrát).

A tételt alkalmazva az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felbontásakor fellépő részintervallumokra, azonnal kapjuk azt az érdekes következményt, hogy az $[a,b]$ intervallum *bármely felbontásához találhatók olyan* $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ *pontok, hogy a megfelelő* $\sum_{k=1}^N f(\xi_k)h_k$ *Riemann-összeg pontosan egyenlő az* $\int_a^b f(x)dx$




45. ábra. Az integrálközép szemléltetése

*Riemann-integrállal*. Kis túlzással mondhatjuk tehát, hogy a Riemann-összegek nem is olyan rossz közelítései a Riemann-integrálnak.

A középértéktétel segítségével most már jellemezni tudjuk az előző szakasz elején említett $T$ területfüggvényt.

9-13. Következmény: Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és minden $a \le x \le b$ esetén jelölje

$$T(x) := \int_a^x f$$

(integrálfüggvény). Akkor az így definiált $T$ függvény primitív függvénye $f$-nek az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás:

Legyenek $x, x_0 \in [a,b]$ tetszőlegesek. A Riemann-integrál alaptulajdonságai (9-11. Tétel) következtében

(a) Ha $x > x_0$, akkor $T(x) - T(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f - \int_a^{x_0} f$, azaz $T(x) - T(x_0) = \int_{x_0}^x f$. A középértéktétel (9-12. Tétel) miatt van oly $\xi \in [x_0,x]$, hogy $f(\xi) = \frac{1}{x-x_0} \int_x^{x_0} f(x)dx$, innen $\frac{T(x)-T(x_0)}{x-x_0} = f(\xi)$.

($b$) Ha $x < x_0$, akkor $T(x_0) - T(x) = \int_a^{x_0} f - \int_a^x f = \int_a^x f + \int_x^{x_0} f - \int_a^x f$, azaz $T(x_0) - T(x) = \int_x^{x_0} f$. Újra a középértéktétel miatt van oly $\xi \in [x,x_0]$, hogy $f(\xi) = \frac{1}{x_0-x} \int_x^{x_0} f(x)dx$, ahonnan $\frac{T(x_0)-T(x)}{x_0-x} = f(\xi)$.

Mindkét esetben van tehát olyan $\xi$ hely az $x$ és $x_0$ között, hogy

$$\frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} = f(\xi)$$

Ha most $x \to x_0$, akkor nyilván $\xi \to x_0$ is teljesül, így $f$ folytonossága miatt $f(\xi) \to f(x_0)$. Ezért $T$ differenciálható $x_0$-ban, és $T'(x_0) = f(x_0)$, amivel a bizonyítás kész. $\square$

Most már bebizonyíthatjuk a primitív függvény és a Riemann-integrál kapcsolatát leíró alapvető tételt, melyet az *integrálszámítás alaptételének* is neveznek.

**9-14. Tétel:** (Newton–Leibniz-tétel). Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és legyen $F$ ennek egy tetszőleges primitív függvénye. Akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Bizonyítás:**

Vezessük be ismét a $T$ integrálfüggvényt: $T(x) := \int_a^x f$. Az előző Következmény értelmében $T$ primitív függvénye $f$-nek, így az $F$ primitív függvénytől csak egy konstansban különbözhet: $F = T + C$ alkalmas $C \in \mathbf{R}$ számra. Innen pedig

$$F(b) - F(a) = T(b) + C - T(a) - C = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

ami a tételt igazolja. □

Bevezetve a tömör $[F]_a^b := F(b) - F(a)$ jelölést, a Newton–Leibniz-tétel az alábbi formába is írható

$$\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = \left[\int f(x)dx\right]_a^b,$$

ami egyúttal indokolja a hasonló jelölést is.

Mivel pedig $f$ definíció szerint primitív függvénye az $f'$ deriváltfüggvénynek (ha az létezik), azért igaz az alábbi

**9-15. Következmény:** Ha $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonosan deriválható az $[a,b]$ intervallumon, akkor

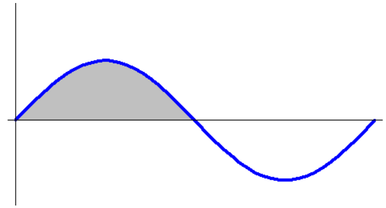
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Az eredményeket néhány példán keresztül szemléltetjük.

**9-14. Példa:** Határozzuk meg a szinuszfüggvény grafikonjának egyetlen félhulláma alatti területet.

*Megoldás*. A szóban forgó terület az $\int_0^\pi \sin x\, dx$ Riemann-integrállal egyenlő. Ennek értéke $\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$

**9-15. Példa:** Mekkora területet fognak közre az $x \mapsto x^2$ és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények grafikonjai?



46. ábra. Fél szinuszhullám alatti terület

*Megoldás*. A szóban forgó terület két Riemann-integrál különbségeként fejezhető ki, mégpedig

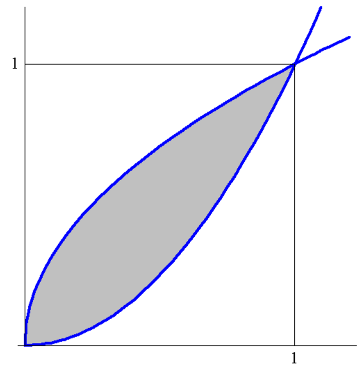
$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

A primitív függvények meghatározására a már tárgyalt integrálási módszereket használhatjuk. Külön megemlítendő azonban a *helyettesítéses integrálás* esete, mely határozott (Riemann-) integrálok kiszámítására valamivel egyszerűbben használható, mint a primitív függvények meghatározására.

**9-16. Állítás:** Ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény primitív függvénye $F$, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ pedig folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F]_{g(a)}^{g(b)}\,.$$

Az állítás a 9-7. Állítás azonnali következménye. Különbség van azonban a gyakorlati alkalmazásban. Bevezetve a $t := g(x)$ helyettesítést, deriválással a formális $dt = g'(x)dx$ egyenlőség adódik. Az állítást ebben a formalizmusban úgy interpretáljuk, hogy ha az eredeti $x$ változó befutja az $[a,b]$ intervallumot, akkor az új $t$




47. ábra. Az $x \mapsto x^2$ és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények grafikonjai közti terület

változó nyilván a $[g(a),g(b)]$ intervallumot futja be, innen

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = [F]_{g(a)}^{g(b)}.$$

Az integrandusban tehát $g(x)$-et kicseréljük $t$-re, $g'(x)dx$-et $dt$-re, az integrálási határokat pedig $g(a)$-ra ill. $g(b)$-re, így egy új integrált kapunk, melyet feltehetően már könnyebb kiszámítani. A fenti gondolatmenet matematikailag nem egészen korrekt, de könnyen megjegyezhető, és, mint láttuk, mégis korrekt eredményre vezet.

**9-16. Példa:** Számítsuk ki az $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin x^2\,dx$ Riemann-integrált.

*Megoldás*. Legyen $t := x^2$, akkor deriválással $dt = 2x\,dx$. Mikor $x$ befutja a $[0,\sqrt{\pi}]$ intervallumot, $t$ a $[0,\pi]$

intervallumot futja be, így

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (-\cos \pi + \cos 0) = 1.$$

A 9-16. Állítás egy hasznos speciális esetét nyerjük, ha az integrálási határokat ($a$ és $b$) kicseréljük a $g^{-1}(a)$ és $g^{-1}(b)$ számokra (feltéve persze, hogy a $g^{-1}$ inverz függvény létezik). Felcserélve az $x$ és $t$ változójelöléseket (ez megtehető, egy-egy integrálon belül a függvény argumentumának jelölése közömbös), a következő állításhoz jutunk.

**9-17. Következmény:** Ha $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pedig olyan folytonosan differenciálható függvény, melynek $g^{-1}$ inverze létezik, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt.$$

Az állítás gyakorlati alkalmazása a már megismert szemléletes formalizmusban a következő. Szemben a 9-16. Állítás esetével, ahol egy függvényt helyettesítettünk változóval, most az $x$ változót helyettesítjük egy $g$ függvénnyel: $x := g(t)$. Deriválva: $dx = g'(t) \, dt$. Az új változónak megfelelő integrálási határokat az alábbi meggondolással nyerjük. Nyilván $t = g^{-1}(x)$, így ha $x$ befutja az $[a,b]$ intervallumot, akkor $t$ a $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ intervallumot futja be. Az integrandusban tehát kicseréljük $x$-et $g(t)$-re, $dx$-et $g'(t) \, dt$-re, az integrálási határokat pedig $g^{-1}(a)$-r ill. $g^{-1}(b)$-re. Így egy új integrált kapunk, melyet – reményeink szerint – már könnyebb kiszámítani.

9-17. Példa: Határozzuk meg az $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ függvény grafikonja (negyedkör) alatti területet.

*Megoldás*. A kérdéses terület nyilván az $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ Riemann-integrál értékével egyezik. Legyen $x := \sin t$, akkor $dx = \cos t\,dt$. Könnyen látható, hogy amennyiben $t$ befutja a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumot, $x$ épp a $[0,1]$ intervallumot futja be. (Gépiesebben: $t$ befutja az $[\arcsin 0,\arcsin 1]$ intervallumot.) Innen

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

Alkalmazva a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus azonosságot:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Megkaptuk tehát az egységsugarú kör területének negyedrészét. Az eredmény persze jól ismert, ami azt jelzi, hogy a Riemann-integrál valóban a geometriai területfogalmat általánosítja.

9-18. Következmény: Ha az $f : [-a,a] \to \mathbf{R}$ folytonos, és *páratlan* függvény a $[-a,a]$ 0-ra szimmetrikus intervallumon, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Bizonyítás:

Az állítás szemléletesen nyilvánvaló: a páratlanság miatt $f$ a $[-a,0]$ intervallumon ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint $[0,a]$-n, de ellentétes előjellel, így a $[-a,0]$ intervallumon a görbe alatti előjeles terület nyilván $(-1)$-szerese a $[0,a]$ intervallumon vett görbe alatti előjeles területtel; kettőjük összege így zérus.

Vezessünk be új változót az $x := -t$ definícióval: ekkor $dx = -dt$, az új integrálási határok pedig $t = a$ és $t = -a$. Innen, kihasználva $f$ páratlanságát:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{-a} f(-t)\cdot(-1)\,dt = \int_{a}^{-a} (-f(t))\cdot(-1)\,dt = \int_{a}^{-a} f(t)\,dt = -\int_{-a}^{a} f(t)\,dt.$$

Vagyis az $\int_{-a}^{a} f$ Riemann-integrál egyenlő saját $(-1)$-szeresével, ennélfogva szükségképp zérus. $\square$

**9-18. Példa:** Számítsuk ki a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{e^{-3x^2+1}\cdot \operatorname{sh} 5x}{(3+\cos x)\cdot\log(x^2+2)}\,dx$ Riemann-integrált.

*Megoldás*. Az integrandusz rendkívül bonyolult, így a primitív függvény megkeresése eleve reménytelennek látszik. Azonban a 9-18 következmény miatt erre nincs is szükség, mert az integrandusz könnyen láthatóan értelmes, folytonos és páratlan függvény, az integrálás pedig egy $0$ középű intervallumon történik: következésképp az integrál értéke zérus.

# 25. lecke

# Alkalmazások és általánosítások

## 9.5. Ívhossz és térfogat

Ebben a szakaszban *síkgörbék* ívhosszát fogjuk értelmezni és a kiszámítására formulát adni. Nem célunk teljes általánosságra törekedni. Csak olyan görbékkel foglalkozunk, melyek *folytonos* függvények grafikonjaként állíthatók elő. Hasonlóan, a térfogatot is csak bizonyos *forgástestekre* vizsgáljuk, mégpedig olyanokra, amelyek egy folytonos $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli megforgatásával keletkeznek.

9-6. Definíció: Legyen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ egy korlátos intervallum, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ adott folytonos függvény. Jelölje $\Gamma$ az $f$ függvény grafikonját, azaz

$$\Gamma := \{(x,f(x)) : \; a \leq x \leq b\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felbontása. Tekintsük az ehhez tartozó *beírt töröttvonal* hosszát:

$$L_N := \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Ha a beírt töröttvonalak halmaza felülről korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a $\Gamma$ görbének *van ívhossza*, a beírt töröttvonal-hosszak felső határát pedig a görbe *ívhosszának* nevezzük, és a $|\Gamma|$ szimbólummal jelöljük.

A definíció igen szemléletes, de konkrét görbék ívhosszának kiszámítására alkalmatlan. Ha azonban az $f$ függvény nemcsak folytonos, de *folytonosan differenciálható* is, az ívhosszra (elvben) egyszerű formulát tudunk adni.

9-19. Tétel: Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, jelölje $\Gamma$ a függvény grafikonját. Akkor $\Gamma$-nak van ívhossza, éspedig

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Bizonyítás:

Jelölje szokásosan $h_k := x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2,\dots,N)$, akkor az adott felosztáshoz tartozó beírt töröttvonalhossz:

$$L_N = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{h_k^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot h_k$$

A Lagrange-középértéktétel szerint alkalmas $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ számok mellett az itt fellépő különbségi hányadosok pontosan egyenlők a $f'(\xi_k)$ deriváltakkal, innen

$$L_N = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot h_k,$$

azaz $L_N$ az $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ integrál egy Riemann-összege (az integrál létezik, mert $f'$ folytonos). A felbontás korlátlan finomítása mellett tehát az $L_N$ számok ehhez az integrálhoz tartanak, ami egyúttal az $L_N$ számok szuprémuma is. A részletes meggondolásokat elhagyjuk. $\square$

**9-19. Példa:** Számítsuk ki az $R$ sugarú félkör kerületét.

*Megoldás*. Jelölje $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$ (ahol $-R \le x \le R$), akkor $f$ grafikonja épp egy origó közepű $R$ sugarú félkör. Nyilván $f'(x) := \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, így a 9-19. Tétel miatt a görbe ívhossza

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_a^b \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

Helyettesítsünk: $x := R \sin t$, akkor $dx = R \cos t\, dt$. Az új integrálási határok: $-\pi/2$ és $\pi/2$. Innen

$$|\Gamma| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R}{R \cos t} R \cos t\, dt = R\pi.$$

Az eredmény persze jól ismert. A példa azt illusztrálja, hogy a fenti fogalom valóban az intuitív ívhossz-fogalmat takarja.

**9-20. Példa:** Számítsuk ki az $x \mapsto \operatorname{ch} x$ láncgörbe ívhosszát a $-1$ és $1$ abszcisszájú pontok közt.

*Megoldás*. A függvény deriváltja: $x \mapsto \operatorname{sh} x$, innen az ívhossz:

$$|\Gamma| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x\, dx = 2\operatorname{sh} 1 = e - \frac{1}{e}.$$

Ha a görbe $x = a(t)$, $y = b(t)$ paraméteres formában adott (ahol $t$ valamilyen $[\alpha,\beta]$ intervallumot fut be), akkor a $\frac{dy}{dx} = \frac{b'(t)}{a'(t)}$ összefüggést felhasználva, az $x := a(t)$ helyettesítéssel az ívhossz alábbi kifejezéséhez jutunk:

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(a'(t))^2 + (b'(t))^2}\, dt$$

(mivel ekkor $dx = a'(t)\, dt$). Ez a megközelítés már alkalmas az ívhosszfogalomnak és az ívhossz kiszámításának *térgörbékre* való kiterjesztésére. Megmutatható (a részletektől eltekintünk), hogy ha egy térgörbe $x = a(t)$, $y = b(t)$, $z = c(t)$ paraméteres formában adott (ahol $a$, $b$, $c$ adott, folytonosan differenciálható függvények, $t$ pedig valamilyen $[\alpha,\beta]$ intervallumot fut be), akkor e térgörbe ívhossza az alábbi formulával számítható ki:

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(a'(t))^2 + (b'(t))^2 + (c'(t))^2}\, dt.$$

Rátérünk a forgástestek térfogatának témakörére.

**9-7. Definíció:** Legyen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ egy korlátos intervallum, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ adott folytonos függvény. Legyen $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felbontása, jelölje $h_k := x_k - x_{k-1}$. Tekintsük az $f$ függvény grafikonja által meghatározott forgástestet, amikor a grafikont az $x$ tengely körül forgatjuk. Definiáljuk a *beírt térfogat-összegeket*:

$$V_-^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^{N} (f_k^{\min})^2 \pi \cdot h_k,$$

és a *körülírt térfogat-összegeket*:

$$V_+^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^{N} (f_k^{\max})^2 \pi \cdot h_k,$$

ahol $f_k^{\min}$ ill. $f_k^{\max}$ jelöli $f$ minimális ill.maximális értékét az $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumon. Ha a $V_-^{(N)}(f)$ számok halmazának felső határa és a $V_+^{(N)}(f)$ számok halmazának alsó határa megegyezik, akkor ezt a közös $V$ értéket a fenti forgástest *térfogatának* nevezzük.

A definíció szemléletes: a térfogatot beírt és körülírt *hengerek* össztérfogatával közelítjük. Valóban, a $k$-adik henger sugara épp $f_k^{\min}$ ill. $f_k^{\max}$, magassága pedig $h_k$. A konstrukció pontos megfelelője a Riemann-integrál alsó és felső integrálközelítő összegeinek. Világos, hogy a beírt ill. körülírt térfogatösszegek épp a $\pi \cdot f^2$ függvény alsó ill. felső integrálközelítő összegeivel egyeznek, innen azonnal kapjuk a forgástestek térfogatának kiszámítására vonatkozó tételt.

**9-20. Tétel:** Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, akkor a grafikonjának az $x$-tengely körüli megforgatásával nyert forgástestnek mindig van térfogata, éspedig

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

□

**9-21. Példa:** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű ellipszis $x$-tengely körüli forgatásával nyert forgási ellipszoid térfogatát.

*Megoldás*. A felső fél-ellipszist leíró függvény formulája: $f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (ahol $x\in[-a,a]$). Innen a térfogat:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\,dx=b^2\pi\cdot\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=2b^2\pi\cdot\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{4ab^2\pi}{3}.$$

## 9.6. Improprius integrál

A Riemann-integrál felépítésekor mindvégig egy *korlátos és zárt* $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvényeket vizsgáltunk. Általában feltettük, hogy a szóban forgó függvények folytonosak, így azok automatikusan korlátosak is (Weierstrass tétele értelmében). Most ezeket a feltételeket igyekszünk gyengíteni, azaz az integrálfogalmat igyekszünk kiterjeszteni bizonyos nem korlátos intervallumokra ill. nem korlátos függvényekre.

*Integrálás nem korlátos intervallumon*

Legyen $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ egy (félig végtelen intervallumon értelmezett) folytonos függvény. Már tudjuk (9-10. Tétel), hogy $f$ minden $[a,b]$ korlátos intervallumon Riemann-integrálható ($b>a$ ).

**9-8. Definíció:** Ha a $T(x):=\int_a^x f$ integrálfüggvénynek a $(+\infty)$-ben van véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^{+\infty} f$ *improprius integrál létezik* (vagy *konvergens*), és ezt a határértéket $f$-nek az $[a,+\infty)$ intervallumon vett *improprius integráljának* nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^{+\infty} f$ improprius integrál nem létezik vagy *divergens*.

Hasonlóan definiáljuk a $(-\infty,a]$ félig végtelen intervallumon vett improprius integrált is. Azt mondjuk, hogy az egész $\mathbf{R}$-en értelmezett folytonos $f$ függvény improprius értelemben integrálható, ha minden $a\in\mathbf{R}$ esetén az $\int_{-\infty}^a f$ és az $\int_a^{+\infty} f$ improprius integrálok mindig léteznek. Ekkor az $\int_{-\infty}^a f+\int_a^{+\infty} f$ összeg nem függ az $a$ szám megválasztásától (miért?); ezt az összeget $f$-nek az $\mathbf{R}$-en vett improprius integráljának nevezzük és az $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ vagy az $\int_{\mathbf{R}} f$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Legyen ismét $f$ egy $[a,+\infty)$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Jelölje $F$ ennek egy primitív függvényét. A Newton–Leibniz-tétel értelmében minden $b>a$ számra

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

teljesül. Képezve mindkét oldal határértékét $b\to+\infty$ mellett, azonnal kapjuk, hogy

**9-21. Állítás:** Az $\int_a^{+\infty} f$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha $F$-nek véges határértéke van a $(+\infty)$-ben, éspedig ekkor

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

A jobb oldalon álló különbséget röviden az $[F]_a^{+\infty}$ szimbólummal is szokás jelölni. Formálisan tehát a Newton–Leibniz-tétel most is igaz, a $(+\infty)$-ben vett „helyettesítési érték” helyett értelemszerűen határértéket véve.

Analóg állítás fogalmazható meg a $\int_{-\infty}^a f$ és a $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ típusú improprius integrálok kiszámítására is.

**9-22. Példa:** Számítsuk ki az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

*Megoldás*. Az integrandusnak az $[1,+\infty)$ intervallumon egy primitív függvénye az $F(x) := \log x$ előírással értelmezett függvény. Ennek nincs véges határértéke a $(+\infty)$-ben, így a szóban forgó improprius integrál nem létezik (divergens).

**9-23. Példa:** Számítsuk ki az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

*Megoldás*. Az integrandusnak az $[1,+\infty)$ intervallumon egy primitív függvénye az $F(x) := -\frac{1}{x}$ előírással értelmezett függvény. Ennek határértéke a $(+\infty)$-ben zérus, innen

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

*Nem korlátos függvények integrálja*

Legyen $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ egy (félig nyílt intervallumon értelmezett) folytonos függvény, ahol $f$ nem feltétlen korlátos: $\lim_b f$ esetleg $(+\infty)$ vagy $(-\infty)$ is lehet.

**9-9. Definíció:** Ha a $T(x) := \int_a^x f$ integrálfüggvénynek a $b$ helyen van véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ *improprius integrál létezik* (vagy *konvergens*), és ezt a határértéket $f$-nek az $[a,b)$ intervallumon vett *improprius integráljának* nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál nem létezik vagy *divergens*.

Ha a $\lim_b f$ határérték létezik és véges, akkor az $f(b) := \lim_b f$ definícióval az $f$ függvényt kiterjeszthetjük az $[a,b]$ zárt intervallumra és a kiterjesztett $f$ folytonos marad $[a,b]$-n. Könnyen látható, hogy ekkor a „közönséges" $\int_a^b f$ Riemann-integrál megegyezik a fentebb definiált improprius integrállal, tehát semmi újat nem kapunk; de ez az észrevétel indokolja az azonos jelölésmódot (ami olykor megtévesztő is lehet, lévén az improprius integrál a Riemann-integrálnál összetettebb fogalom).

Analóg módon definiáljuk a $(a,b]$ félig nyílt intervallumon vett improprius integrált is, ahol $\lim_a f$ esetleg $(+\infty)$ vagy $(-\infty)$ is lehet, ill. az $(a,b)$ nyílt intervallumon vett improprius integrált, ha $f$ határértéke az intervallum mindkét végpontjában végtelen is lehet.

Hasonlóan a nem korlátos intervallumon vett improprius integrálok esetéhez, a Newton–Leibniz-tétel most a következő módosított formába írható.

**9-22. Állítás:** Legyen $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ egy félig nyílt intervallumon értelmezett folytonos, de a $b$ pont környezetében nem feltétlen korlátos függvény, jelölje $F$ egy primitív függvényét. Az $\int_a^b f$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha $F$-nek véges határértéke van a $b$-ben, éspedig ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b} F(t) - F(a).$$

A jobb oldalon álló különbséget röviden (ám kissé pongyola módon) most is az $[F]_a^b$ szimbólummal szokás jelölni. A Newton–Leibniz-tétel tehát formálisan továbbra is igaz marad, a $b$-ben vett helyettesítési érték helyett értelemszerűen a határértéket véve.

**9-24. Példa:** Számítsuk ki az $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

*Megoldás*. Az integrandusnak a $(0,1)$ intervallumon egy primitív függvénye az $F(x) := \log x$ előírással értelmezett függvény. Ennek nincs véges határértéke a 0-ban, így a szóban forgó improprius integrál nem létezik (divergens).

**9-25. Példa:** Számítsuk ki az $\int_0^1 \log x\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

*Megoldás*. Ha az improprius integrál létezik, akkor egyenlő az $\int_\epsilon^1 \log x\,dx$ értékek $\varepsilon \to 0$ melletti határértékével ($\varepsilon > 0$ ). Ez utóbbi Riemann-integrált parciális integrálással számíthatjuk ki. Legyen $u(x) := \log x$, és $v'(x) := 1$, akkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = x$, innen

$$\int_\varepsilon^1 \log x\,dx = [x \cdot \log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} \cdot x\,dx = 1 \cdot \log 1 - \varepsilon \cdot \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) = -1 + \varepsilon - \varepsilon \cdot \log \varepsilon.$$

A $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \log \varepsilon$ határérték kiszámításához jelölje $t := -\log \varepsilon$. Ha $\varepsilon > 0$, és $\varepsilon \to 0$, akkor nyilván $t \to +\infty$. Továbbá $\varepsilon \cdot \log \varepsilon = -e^{-t} \cdot t$, innen pedig

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \log \varepsilon = -\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

(mert az exponenciális függvény gyorsabban tart $(+\infty)$-be, mint a hatványfüggvény). Következésképp az $\int_0^1 \log x\,dx$ improprius integrál konvergens, éspedig $\int_0^1 \log x\,dx = -1$.

A fenti levezetést – pongyolán és lerövidítve – néha az alábbi formába szokták írni:

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \cdot \log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x \, dx = [x \cdot \log x]_0^1 - 1 = -1,$$

ahol az $[x \cdot \log x]_0^1$ kifejezés kiértékelésekor a felső határon értelemszerűen helyettesítési értéket, az alsó határon pedig határértéket számítunk.

# 26. lecke

# Ellenőrző kérdések, feladatok

## 9.7. Ellenőrző kérdések

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** Az egyik improprius integrál nem létezik. Melyik?

☐ $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ ☐ $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx$ ☐ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x}}\,dx$ ☐ $\int_0^1 \frac{1}{3x^2}\,dx$

**2.** Az $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\sin x}\,dx$ integrál értéke

☐ 0, mert az integrandusz páros
☐ 0, mert az integrandusz páratlan
☐ pozitív, mert az integrandusz pozitív
☐ negatív, mert a kitevő előjele negatív

**3.** Csak az egyik improprius integrál létezik. Melyik?

☐ $\int_{-\infty}^0 e^{-3x}\,dx$ ☐ $\int_0^\infty \sin x\,dx$ ☐ $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$ ☐ $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$

**4.** Mi az $x \to \operatorname{tg} 2x$ leképezés primitív függvénye a $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ intervallumon?

☐ $\log\cos 2x$ ☐ $\log|\sin 2x|$ ☐ $-\frac{1}{2}\log\cos 2x$ ☐ $2\log\cos 2x$

**5.** Az $f : [a,b]$ folytonos Riemann-integrálható, ha a követező két szám megegyezik:

☐ a felső integrálközelítő összegek felső határa és az alsó integrálközelítő összegek felső határa
☐ a felső integrálközelítő összegek alsó határa és az alsó integrálközelítő összegek felső határa
☐ a felső integrálközelítő összegek alsó határa és az alsó integrálközelítő összegek alsó határa

☐ a felső integrálközelítő összegek felső határa és az alsó integrálközelítő összegek alsó határa

**6.** Csak az egyik integrál integrál nem létezik. Melyik?

☐ $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ ☐ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ☐ $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ ☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

**7.** Az egyik improprius integrál divergens. Melyik?

☐ $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ ☐ $\int_{-\infty}^0 e^{-x}\,dx$ ☐ $\int_0^1 \log 2x\,dx$ ☐ $\int_0^\infty \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

**8.** Az alábbi improprius integrálok közül csak az egyik konvergens. Melyik?

☐ $\int_1^\infty e^{-3x}\,dx$ ☐ $\int_0^\infty e^{2x}\,dx$ ☐ $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ☐ $\int_1^\infty \log x\,dx$

**9.** Az $x \to \dfrac{2}{(1+2x)^2}$ $(x > 0)$ függvény egy primitív függvénye

☐ $\operatorname{arctg} 2x$ ☐ $-\dfrac{1}{1+2x}$ ☐ $2 \cdot \operatorname{arctg} 2x$ ☐ $\log|1+2x|$

**10.** Az $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandusz egy primitív függvénye

☐ $-\dfrac{1}{f(x)^2}$ ☐ $\dfrac{1}{\log f(x)}$ ☐ $\log f(x)$ ☐ $\dfrac{1}{f(x)}$

**11.** Ha $F,G : [a,b] \to \mathbf{R}$ ugyanazon függvény két primitív függvénye, akkor szükségképp

☐ $F+G$ konstans ☐ $F \cdot G$ konstans ☐ $F = G$ ☐ $F - G$ konstans

**12.** . Ha $u$, $v$ folytonosan differenciálható függvények, akkor szükségképp:

☐ $\int u'v' = uv - \int uv$ ☐ $\int uv' = uv - \int u'v$ ☐ $\int uv = u'v - \int uv'$ ☐ $\int uv' = u'v' - \int u'v$

**13.** Az $x \to \cos^2 x \sin x$ leképezés egyik primitív függvénye

☐ $\frac{\cos^3 x}{3}$ ☐ $-\frac{\cos^3 x}{3}$ ☐ $\frac{\sin^3 x}{3}$ ☐ $2\cos x \sin x$

**14.** Az $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhossza:

☐ $\int_0^1 \sqrt{1+(f(x))^2}\,dx$ ☐ $\int_0^1 (1+(f'(x))^2)\,dx$ ☐ $\int_0^1 \sqrt{1-(f'(x))^2}\,dx$ ☐ $\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

End Quiz

Score:

## 9.8. Feladatok

**9-1. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi primitív függvényeket.

$(a)$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx,$$

$(b)$

$$\int \cos^2 x \, dx,$$

$(c)$

$$\int x^{13} \log x \, dx,$$

$(d)$

$$\int \text{arctg } x \, dx,$$

$(e)$

$$\int x \cdot \text{arctg } x \, dx,$$

$(f)$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \, dx,$$

$(g)$

$$\int \frac{1}{4x^2 + 1} \, dx,$$

$(h)$

$$\int \frac{e^x}{\text{ch } x} \, dx.$$

Megoldás: itt

---

**9-2. Feladat:** „Az $\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2\,dx$ integrált határozzuk meg parciális integrálással: $u(x) := \frac{1}{x^3}$, $v'(x) := x^2$ akkor nyilván $u'(x) = -\frac{3}{x^4}$, $v(x) = \frac{x^3}{3}$. Innen

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2\,dx = \frac{1}{3} + \int \frac{1}{x^3} \cdot x^2\,dx,$$

ahonnan pedig az adódik ($\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 dx$ kivonásával), hogy $0 = \frac{1}{3}$ (??)".
Hol a hiba a gondolatmenetben, és mi a primitív függvény?

Megoldás: itt

---

**9-3. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x\,dx,$$

(b)

$$\int_0^2 \frac{\log x}{x}\,dx,$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Megoldás: itt

**9-4. Feladat:** Számítsuk ki az $f(x) := \frac{x^2}{2}$ formulával definiált függvény grafikonjának ívhosszát a 0 és 1 abszcisszájú pontok között.

Megoldás: itt

**9-5. Feladat:** Egy kancsal fecske (aki $60^o$-kal balra kancsalít, azaz amiről úgy gondolja, hogy egyenesen előtte van, annak valójában $60^o$-kal eltér a fecske pillanatnyi irányától) haza akar repülni a tőle légvonalban 1 km-re levő fészkére. Kancsalsága miatt persze állandóan elvéti az irányt, de folyamatosan korrigálja azt úgy, hogy a fészket mindvégig maga előtt látja. Mennyi utat mesz meg ténylegesen, míg hazaér? (*Útmutatás*: a fecske pályája egy $x(t) := e^{-ct}\cos t$, $y(t) := e^{-ct}\sin t$ paraméteres egyenletű *logaritmikus spirális*, ahol a $c$ paraméter a kancsalítás mértékéből határozható meg.)

Megoldás: itt

**9-6. Feladat:** Az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabola grafikonjának az $y \leq 2$ feltételt kielégítő darabját forgassuk meg az $y$ tengely körül. Mekkora az így nyert forgási paraboloid térfogata?

Megoldás: itt

**9-7. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

(a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx,$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,dx,$$

(c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+1}\,dx,$$

(d)

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx.$$

Megoldás: itt

---

**9-8. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \frac{2x^3+5x}{\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-9. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx$

Megoldás: itt

**9-10. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$

Megoldás: itt

**9-11. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \left(x^2+5\right)^6 \cdot 2x\,dx$

Megoldás: itt

**9-12. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}\,dx$

Megoldás: itt

**9-13. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx$

Megoldás: itt

**9-14. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-15. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+x^2}dx$

Megoldás: itt

---

**9-16. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int (2x-6)\cdot \operatorname{sh} x\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-17. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int (3x+7)\cdot e^{-x}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-18. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int (4x+3)\cdot \log x\,dx =$

Megoldás: itt

---

**9-19. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \cos^5 x \, dx$

Megoldás: itt

---

**9-20. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx$

Megoldás: itt

---

**9-21. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx$

Megoldás: itt

---

**9-22. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$

Megoldás: itt

---

**9-23. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx$

Megoldás: itt

---

**9-24. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-25. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+2)}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-26. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-27. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-28. Feladat:** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+11}\,dx$

Megoldás: itt

---

9-29. Feladat: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt: $\int \frac{7}{25x^2 + 20x + 13}\, dx$

Megoldás: itt

9-30. Feladat: Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\int_1^4 \frac{1 - x}{\sqrt{x}}\, dx$

Megoldás: itt

9-31. Feladat: Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx$

Megoldás: itt

9-32. Feladat: Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x\, dx$

Megoldás: itt

9-33. Feladat: Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} \cdot \sin^6 x\, dx$

Megoldás: itt

**9-34. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-35. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\displaystyle\int_1^{e} x^3 \cdot \log x\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-36. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-37. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\displaystyle\int_0^{5} \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-38. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrált: $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4}{e^x+2}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-39. Feladat:** Számítsuk ki azon forgástest térfogatát, mely az $f(x) := \dfrac{e^x}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}}$ képlettel értelmezett függvény grafikonja $[0,1]$ intervallumhoz tartozó ívének $x$-tengely körüli forgatásával keletkezik.

Megoldás: itt

---

**9-40. Feladat:** Számítsuk ki az $f(x) := x \cdot \sqrt{x}$ képlettel értelmezett függvény görbéjének ívhosszát a $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ intervallum felett.

Megoldás: itt

---

**9-41. Feladat:** Számítsuk ki az $f(x) := x^2 - \dfrac{\log x}{8}$ képlettel értelmezett függvény görbéjének ívhosszát az $[1,e]$ intervallum felett.

Megoldás: itt

---

**9-42. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrált (ha egyáltalán létezik): $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: itt

---

**9-43. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrált (ha egyáltalán létezik): $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$

Megoldás: itt

**9-44. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrált (ha egyáltalán létezik): $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

Megoldás: itt

**9-45. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrált (ha egyáltalán létezik): $\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

Megoldás: itt

**9-46. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrált (ha egyáltalán létezik): $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Megoldás: itt

**9-47. Feladat:** Számítsuk ki az alábbi improprius integrált (ha egyáltalán létezik): $\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Megoldás: itt

**9-1 Megoldás:**

$(a)$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{4}.$$

A feladat parciális integrálással is megoldható. Legyen $u(x) := \sin x$, $v'(x) := \cos x$, akkor $u'(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$, innen $\int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x - \int \cos x \sin x \, dx$, ahonnan a keresett integrál kifejezhető: $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$. Az eredmény nincs ellentmondásban az előző eredménnyel. A két úton kiszámított primitív függvények egy konstansban különbözhetnek, és különböznek is:

$$-\frac{\cos 2x}{4} = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} = -\frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x.$$

$(b)$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

$(c)$ Integráljunk parciálisan: $u(x) := \log x^{13} = 13\log x$, $v'(x) := x^{13}$, akkor $u'(x) = \frac{13}{x}$, $v(x) = \frac{x^{14}}{14}$, innen

$$\int x^{13}\log x \, dx = \frac{1}{14}x^{14}\log x - \frac{13}{14}\int x^{13} = \frac{1}{14}x^{14}\log x - \frac{13}{196}x^{14}.$$

$(d)$ Integráljunk parciálisan: $u(x) := \operatorname{arctg} x$, $v'(x) := 1$, akkor $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $v(x) = x$, innen

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

($e$) Integráljunk parciálisan: $u(x) := \operatorname{arctg} x$, $v'(x) := x$, akkor $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $v(x) = \frac{1}{2}x^2$, innen

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

($f$)

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\, dx = x - 2\operatorname{arctg} x.$$

($g$) Helyettesítsünk: $t := 2x$, akkor $x = \frac{t}{2}$ és $dx = \frac{1}{2}\, dt$, innen

$$\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x.$$

($h$)

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{ch} x}\, dx = \int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx.$$

Helyettesítsünk: $t := e^x$, akkor $x = \log t$ és $dx = \frac{1}{t}\, dt$, innen

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{ch} x}\, dx = \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\, dt = \log(t^2+1) =$$

$$= \log(e^{2x}+1).$$

9-2 **Megoldás:**

A hiba ott van, hogy a primitív függvény csak additív konstans erejéig egyértelmű. Az

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{3} + \int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 \, dx,$$

egyenlőség két oldalán álló primitív függvény tehát egy konstansban különbözhet (és különbözik is).

**9-3 Megoldás:**

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx =$$
$$= [\operatorname{tg} x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(b)

$$\int_0^2 \frac{\log x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2 \log x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot [\log^2 x]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \log^2 2.$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx =$$
$$= -2[\log |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -2 \log \frac{\sqrt{2}}{2} = -\log \frac{1}{2} = \log 2.$$

9-4 **Megoldás:**

A függvény deriváltja: $f'(x) = x$, így a kérdéses ív $L$ hossza:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Helyettesítsünk: $x :=$ sh $t$, akkor $dx =$ ch $t\,dt$, az új határok pedig 0 és $A$, ahol sh $A = 1$. Innen

$$L = \int_0^A \mathrm{ch}^2 t\,dt = \int_0^A \frac{1+\mathrm{ch}2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\mathrm{sh}\ 2t}{2}\right]_0^A = \frac{1}{2}(A + \mathrm{sh}\ A\ \mathrm{ch}\ A) =$$

$$= \frac{1}{2}(A + \mathrm{sh}\ A\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 A}).$$

Felhasználva, hogy sh $A = 1$, azt kapjuk, hogy

$$L = \frac{1}{2}(A + \sqrt{2}).$$

Az $A$ szám meghatározható a sh $A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A}) = 1$ egyenletből. Innen $A = \ln(1+\sqrt{2})$, (az $e^A$-ra vonatkozó másodfokú egyenlet másik gyöke negatív!) azaz

$$L = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})).$$

9-5 **Megoldás:**

A görbe paraméteres egyenlete: $x(t) := e^{-ct}\cos t$, $y(t) := e^{-ct}\sin t$, így a pillanatnyi sebesség vektorának komponensei: $x'(t) = -ce^{-ct}\cos t - e^{-ct}\sin t$, $y'(t) = -ce^{-ct}\sin t + e^{-ct}\cos t$. Speciálisan a $t = 0$ időpillanatban a sebességvektorának komponensei: $-c$ és 1. Így a kacsalítás $\alpha$ szögére fennáll, hogy

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{2}.$$

A spirális teljes $L$ hossza:

$$L = \int_0^\infty \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{(-ce^{-ct}\cos t - e^{-ct}\sin t)^2 + (-ce^{-ct}\sin t + e^{-ct}\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{1+c^2}\int_0^\infty e^{-ct}\, dt = \sqrt{1+c^2}\left[\frac{e^{-ct}}{-c}\right]_0^\infty = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} = 2,$$

ahol kihasználtuk a $c$-re nyert korábbi összefüggést is.

Megjegyzés: A teljes ívhossz egy sokkal egyszerűbb „fizikai” meggondolásból is megkapható. Közelítsük a pályát töröttvonallal, az egyes szakaszok hossza legyen $\Delta s_1$, $\Delta s_2$,... Az egyes szakaszokon érvényes elmozdulásvektort bontsuk fel radiális és arra merőleges komponensre. A radiális elmozduláskomponens hossza $\Delta s_k \cos 60^o = \frac{1}{2}\Delta s_k$, és ez megegyezik a közeledés mértékével. Minden szakaszon tehát a megtett út *felével* közeledik a fecske a fészekhez. A megtett utak összege tehát a fecske és a fészek kezdeti távolságának kétszerese.

9-6 **Megoldás:**

A térfogat nyilván egyenlő az *inverz függvény* grafikonjának a 1. tengely körüli forgatásával nyert forgástest térfogatával. Az inverz függvény formulája $x = \sqrt{2y}$, innen a keresett térfogat:

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (\sqrt{2y})^2 \, dy = \pi \cdot \int_0^2 2y \, dy = 4\pi.$$

**9-7 Megoldás:**

($a$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}(A-[\log(1+e^x)]_0^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(A-\log(1+e^A)+\log 2) = \log 2 + \lim_{A\to+\infty}(A-\log(e^A(e^{-A}+1))) =$$

$$= \log 2 + \lim_{A\to+\infty}(A-A-\log(e^{-A}+1)) = \log 2.$$

($b$) Helyettesítsünk: $t := 2x$, akkor $dx = \frac{1}{2}\,dt$. Az új változónak megfelelő határok szintén $(-\infty)$ és $(+\infty)$, innen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi.$$

($c$) Helyettesítsünk: $t := \frac{\sqrt{2}}{x}$, akkor $x = \frac{\sqrt{2}}{t}$ és $dx = -\frac{\sqrt{2}}{t^2}\,dt$. Az új változónak megfelelő határok $(+\infty)$ és $0$, innen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+1}\,dx = -\int_{+\infty}^{0} \frac{t^2}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{t^2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}[\operatorname{arctg} x]_0^{+\infty} = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}.$$

($d$) Helyettesítsünk: $t := x^3$, akkor $dt = 3x^2\,dx$. Az új változónak megfelelő határok szintén 0 és $(+\infty)$, innen

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{3}[-e^{-t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

9-8 **Megoldás:** Függvények hányadosa szerepel az integrandusban, amire ugyanúgy nincs általánosan integrálási szabály, mint a függvények szorzatára. Ám ha a számlálóban levő összeg tagjait külön-külön oszthatjuk a nevezővel, a gyököt pedig hatvány alakban írjuk, az integrandusz lényegesen egyszerűbb lesz:

$$\int \frac{2x^3+5x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x}} + \frac{5x}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{5x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

Végezzük el a két osztást. (Most a kitevők kivonódnak.)

$$\int \left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{5x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

Így sikerült elérnünk, hogy csak két hatványfüggvény összegét kell integrálnunk. Innen:

$$\int \left(2x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}}\right)dx = 2\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Az eredményt írhatjuk gyökös formában is:

$$\frac{4}{7}\sqrt{x^7} + \frac{10}{3}\sqrt{x^3}$$

9-9 **Megoldás:** A függvény ezen alakjából nem igazán látszik az, hogy lineáris belső függvénnyel rendelkező összetett függvényről van szó, de ha egy kicsit alakítunk rajta, akkor már igen. Írjuk a $9x^2$-et $(3x)^2$ formában. Így az integrál a következő alakot ölti:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx$$

Így már látható, hogy a külső függvény most $\dfrac{1}{1+x^2}$. Ez egy alapintegrál:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$$

A belső függvény pedig $3x$. Ezután az eredmény a következő:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3}$$

A feladatból jól látszik, hogy az alapintegrálok biztos ismerete nagyon fontos. Csak akkor jöhet rá valaki, hogy milyen alakban kell írni az integrandust, ha tisztában azzal, hogy $\dfrac{1}{1+x^2}$ egy alapintegrál. Ezután már könnyű észrevenni ezen alapintegrál, és az integrandus közötti hasonlóságot.

*Megjegyzés*: A feladat helyettesítéssel is megoldható. Legyen $t := 3x$, akkor $x = \frac{1}{3}t$, így $dx = \frac{1}{3}dt$. Így alapintegrálhoz jutunk:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x.$$

9-10 **Megoldás:** Az integrandus alig különbözik az $\dfrac{1}{1+x^2}$ alapintegráltól. Elsőként azt lenne jó elérnünk, hogy a nevezőben a $4$ helyén $1$ álljon, ezért célszerű kiemelni $\frac{1}{4}$-et.

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx$$

Írjuk ezután az $\frac{x^2}{4}$ helyett $\left(\frac{x}{2}\right)^2$-t, amit $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ formában is írhatunk.

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}\,dx$$

Így már egyértelmű, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, amiben a belső függvény lineáris, s amelyben $\frac{1}{1+x^2}$ a külső függvény. Ennek integrálja már alapintegrál:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x.$$

A belső függvény most $\frac{1}{2}x$. Alkalmazzuk újra a már ismert eljárást, azaz integráljuk a külső függvényt, alkossunk összetételt a belső függvénnyel, és osszunk a belső függvényből $x$ együtthatójával. Így eredményünk az alábbi lesz:

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

*Megjegyzés*: A feladat helyettesítéssel is megoldható. Legyen $t := \frac{x}{2}$, akkor $x = 2t$, így $dx = 2dt$, ahonnan:

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int \frac{1}{4+4t^2}\cdot 2\,dt = \frac{2}{4}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$$

9-11 **Megoldás:** Az integrandusban felismerhetjük, hogy egy függvény hatványa áll benne megszorozva a hatványozott függvény deriváltjával. Úgy is mondhatjuk, hogy az integrandus $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú. Az ilyen függvények integrálására van egy könnyen alkalmazható módszerünk:

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$$

ahol $\alpha \in \mathbf{R}$, de $\alpha \neq -1$.

Ebben a feladatban nyilván $f(x) := x^2 + 5$ az a függgyvény, aminek a hatványa szerepel, s mellete ott áll szorzóként a deriváltja, hiszen $\left(x^2+5\right)' = 2x$.

A függvénynek tehát $1$-gyel magasabb kitevőjű hatványa lesz az integrál, elosztva ezen $1$-gyel nagyobb kitevővel. Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \left(x^2+5\right)^6 \cdot 2x\,dx = \int \left(x^2+5\right)^6 \cdot \left(x^2+5\right)'\,dx = \frac{\left(x^2+5\right)^7}{7}$$

Látható, hogy a megoldás során nem volt szükség az integrandus hosszas átalakítására. Az volt a fontos, hogy felismerjük, az integrandus típusát. Erre viszont akkor van csak esélyünk, ha rendelkezünk az alapderiváltak biztos ismeretével.

9-12 **Megoldás:** Nem nyilvánvaló, hogy az integranduszban egy függvény hatványa szerepel, ezért alakítunk az integranduson. A tört helyett most írjunk negatív kitevős hatvánnyal való szorzást.

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}\, dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x\, dx$$

Már csak annyit kell észrevennünk, hogy $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, tehát a második tényezőben a hatványozott függvény deriváltja áll.

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x\, dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)'\, dx$$

Alkalmazva a megfelelő integrálási módszert ($\int f^\alpha(x) f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$), a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)'\, dx = \frac{(\operatorname{ch} x)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(\operatorname{ch} x)^2}$$

9-13 **Megoldás:**

Tudjuk, hogy $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$, ezért célszerű a törtet szorzattá bontani, majd a gyök helyett törtkitevős hatványt írni. Így jól láthatóvá válik, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú függvény.

$$\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \int \sqrt{\log x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int (\log x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\log x)'\,dx$$

Alkalmazva a megfelelő integrálási módszert ($\int f^{\alpha}(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$), a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\log x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\log x)'\,dx = \frac{(\log x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{(\log x)^3}$$

9-14 **Megoldás:**

Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja $\left(x^2+4\right)' = 2x$, csak egy konstans szorzóban tér el a tört számlálójától, ami $x$. Ahhoz, hogy $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus, szükség lenne a számlálóban a $2$-re.

Szorozzunk és osszunk tehát $2$-vel, az osztást egyből írjuk az integrál elé $\dfrac{1}{2}$-del való szorzás formájában.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}\,dx$$

A primitív függvény a nevező abszolút értékének logaritmusa:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|x^2+4\right| = \frac{1}{2}\log\left(x^2+4\right)$$

Az abszolút érték elhagyható az eredményben, hiszen $x^2+4>0$ minden valós $x$ esetén.

9-15 **Megoldás:**

Alakítsuk ki a számlálóban a nevező deriváltját, azaz $2x$-t.

$$\int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{1+x^2}\,dx$$

Ekkor az integrandust két olyan tört összegére bomlik, amelyek egyikében a számláló a nevező deriváltja, a másik számlálója pedig konstans. Az első tört integrálja a nevező abszolút értékének logaritmusa, a második tört integrálja alapintegrál:

$$\int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \operatorname{arctg} x$$

9-16 **Megoldás:**

Az integrandus most szorzat, s azon belül is egyik tényezője polinom, a másik pedig a $\operatorname{sh} x$. Ilyen esetben a parciális integrálás alkalmazásával érhetünk célt, mely szerint

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Válasszuk a polinomot $u(x)$-nek, mert így a parciális integrálás után visszamaradó integrálban majd ezen polinom deriváltja fog megjelenni, ami már csak egy konstans. Így a parciális integrálás után már nem szorzatfüggvény áll majd az integrandusban.

Legyen tehát $u(x) := 2x - 6$ és $v'(x) := \operatorname{sh} x$.

$u'$-t deriválással, $v$-t integrálással számítjuk: $u'(x) = 2$, és $v(x) = \operatorname{ch} x$.

Alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\int (2x-6) \cdot \operatorname{sh} x\, dx = (2x-6) \cdot \operatorname{ch} x - \int 2 \cdot \operatorname{ch} x\, dx$$

A feladatot még nem oldottuk meg, hisz még van egy integrálunk. Ebből azonban a konstans szorzót kiemelhetjük, s utána már csak egy alapintegrál marad. Így az eredmény a következő lesz:

$$\int (2x-6) \cdot \operatorname{sh} x\, dx = (2x-6) \cdot \operatorname{ch} x - \int 2 \cdot \operatorname{ch} x\, dx = (2x-6) \cdot \operatorname{ch} x - 2 \int \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= (2x-6) \cdot \operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x$$

9-17 **Megoldás:**

Az integrandus egy polinom és egy exponenciális függvény szorzata, így próbálkozhatunk parciális integrálással, mely szerint:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Legyen $u(x) := 3x + 7$ és $v'(x) := e^{-x}$.

$u'$-t deriválással, $v$-t integrálással számítjuk: $u'(x) = 3$, és $v(x) = -e^{-x}$.

Alkalmazzuk a parciális integrálás képletét (ügyeljünk az előjelekre!):

$$\int (3x+7) \cdot e^{-x}\, dx = -(3x+7) \cdot e^{-x} + \int 3 \cdot e^{-x}\, dx$$

A még megmaradt integrál most már nehézség nélkül kiszámítható:

$$\int (3x+7) \cdot e^{-x}\, dx = -(3x+7) \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{-x} = -(3x+10) \cdot e^{-x}$$

9-18 **Megoldás:**

Szorzatot kell integrálnunk, így a parciális integrálás módszerével próbálkozunk, mely szerint:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Most az egyik tényező polinom, de a másik tényezőben $\log x$ áll. Ennek integrálja nem alapintegrál. Ezért a parciális integrálás során nem célszerű őt $v'(x)$-nek választani, hiszen akkor a $v(x)$-et nem könnyű meghatározni. Legyen tehát a szereposztás most a következő:

$u(x) := \log x$, és $v'(x) := 4x + 3$.

$u'$-t deriválással, $v$-t integrálással számítjuk: $u'(x) = \frac{1}{x}$, és $v(x) = 2x^2 + 3x$.

Helyettesítsünk ezután a parciális integrálás képletébe:

$$\int (4x+3) \cdot \log x\, dx = \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \log x - \int \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk, majd végezzük el az integrálást.

$$\int (4x+3) \cdot \log x\, dx = \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \log x - \int (2x+3)\, dx = \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \log x - \left(x^2 + 3x\right)$$

9-19 **Megoldás:**

Az integrandusban szerepel egy függvény hatványa, de sajnos nem szerepel mellette szorzóként a hatványozott függvény deriváltja, vagy annak számszorosa. Így nem tudjuk azt mondani, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú. Bontsuk ezért szorzattá a függvényt:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx$$

Az első tényező tovább alakítható:

$$\int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos x\,dx$$

Az ismert $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést rendezzük $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ alakra, és helyettesítsünk az integrandusban $\cos^2 x$ helyére.

$$\int \left(\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos x\,dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cdot \cos x\,dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$\int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cdot \cos x\,dx = \int \left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right) \cdot \cos x\,dx =$$

Így az alábbit kaptuk:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \left(\cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x + \sin^4 x \cdot \cos x\right)\,dx$$

A három tagot külön integráljuk, és a második tagból kiemelünk.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos x\,dx - 2\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx + \int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx$$

Az első tag egy alapintegrál, amásik kettőben pedig $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú függvény az integrandus, hiszen $(\sin x)' = \cos x$. Így ezen két tag esetében az $\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)\,dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ formulát alkalmazhatjuk. Az eredmény az alábbi:

$$\int \cos^5 x \, dx = \sin x - 2 \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5}$$

*Megjegyzés*: Hasonló módon integrálhatók $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ és $\operatorname{ch} x$ páratlan kitevős hatványai.

9-20 **Megoldás:**

Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig $\cos x$. Ilyen esetben a parciális integrálás $\left(\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v\right)$ vezet célhoz.

Legyen $u := 4x^2 - 6x + 5$, és $v' := \cos x$. Ekkor $u' = 8x - 6$, és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk be a formulába:

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x - \int (8x - 6) \cdot \sin x \, dx$$

A még meghatározandó integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti feladat volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást, hasonló szerepsztás mellett.

Legyen $u := 8x - 6$, és $v' := \sin x$. Ekkor $u' = 8$, és $v = -\cos x$.

Helyettesítsünk be a formulába (ügyeljünk az előjelekre!)

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x - \left((8x - 6) \cdot (-\cos x) - \int 8(-\cos x) \, dx\right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstanst az integrálból.

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8 \int \cos x \, dx$$

Már csak egy alapintegrálunk maradt. Az integrálást elvégezve, az eredmény a következő:

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8 \sin x =$$

$$= \left(4x^2 - 6x - 3\right) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x$$

9-21 **Megoldás:**

Olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig szinuszfüggvény. Célszerű parciális integrálásssal próbálkozni: a szerepeket tetszőlegesen oszthatjuk ki.

Legyen pl. $u := e^{2x}$, és $v' := \sin 3x$. Ekkor $u' = 2e^{2x}$, és $v = -\dfrac{\cos 3x}{3}$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy mindkét tényező olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú. Figyeljünk oda: amikor $u$-ból $u'$-t állítjuk elő, akkor a deriválásnál a belső függvény deriváltjával *szoroznunk* kell a külső függvény deriváltját, míg amikor pedig $v'$-ből állítjuk elő $v$-t, azaz integrálunk, akkor a belső függvényből $x$ együtthatójával *osztanunk* kell a külső függvény integrálját.

Helyettesítsünk be ezután a parciális integrálás formulájába:

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) \, dx$$

Mielőtt újra alkalmaznánk a parciális integrálást, célszerű ezt egy kicsit rendezni, s a konstansokat kiemelni a tagokban.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx$$

Most újra osszuk ki a szerepeket immáron figyelve arra, hogy ugyanúgy tegyük ezt, mint az első esetben: $u$ legyen az exponenciális, $v'$ pedig a trigonometrikus függvény.

$u := e^{2x}$, és $v' := \cos 3x$. Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = \dfrac{\sin 3x}{3}$.

Helyettesítsünk a parciális integrálás formulájába:

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \left( e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} \, dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és a konstansokat most is emeljük ki a tagokból.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx$$

A keresett integrált tehát visszavezettük önmagára: a kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál egy számszorosát kaptuk a jobb oldalon. Így annyi a feladatunk, hogy *a kapott egyenletből fejezzük ki az integrált*. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$-et.

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cdot\sin 3x$$

Végül osszunk $\dfrac{13}{9}$-del, azaz szorozzunk $\dfrac{9}{13}$-dal.

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cdot\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\cdot\sin 3x$$

Az eredményt kiemelés után az alábbi alakban is írhatjuk:

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{13}\left(2\sin 3x - 3\cos 3x\right)$$

.

**9-22 Megoldás:**

Helyettesítsünk: $t := e^x$, akkor $x = \log t$, és $dx = \frac{1}{t} dt$. Innen:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t,$$

mert az egyszerűsítés után már alapintegrálra jutottunk. Visszatérve az eredeti $x$ változóra, kapjuk, hogy:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \operatorname{arctg} e^x.$$

9-23 **Megoldás:**

Helyettesítsünk: $t := e^x$, akkor $x = \log t$, és $dx = \frac{1}{t}dt$. Innen:

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)t}\,dt$$

Az integrandusz felírható két egyszerű törtkifejezés különbségeként: $\dfrac{1}{(t+1)t} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$, ahonnan:

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt$$

A jobboldal mindkét tagja integrálható: a számláló tagban egyezik a nevező deriváltjával, így az integrál a nevező abszolút értékének logaritmusa:

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \log|t| - \log|t+1|$$

Visszatérve az eredeti változóra:

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \log|e^x| - \log|e^x+1| = x - \log(e^x+1)$$

(A jobb oldalon az abszolút érték elhagyható, mert az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel.)

*Megjegyzés*: A megoldás helyettesítés alkalmazása nélkül is megkapható, ha az integranduszt kissé átalakítjuk:

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)\,dx$$

A jobb oldali integrandusz mindkét tagja nehézség nélkül integrálható: az első tag konstans függvény, a második pedig olyan tört, melyben a nevező deriváltja a számlálóval egyezik, így az integrálja a nevező abszolút értékének logaritmusa. Mivel a nevező mindig pozitív, ezért az abszolút érték el is hagyható, és:

$$\int \frac{1}{e^x + 1}\,dx = x - \log(e^x + 1).$$

9-24 **Megoldás:**

Helyettesítsünk: legyen

$$t := \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \quad t^2 = x \qquad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 2t \qquad \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt$$

Akkor

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t} 2t\,dt = \int \frac{2t}{1+t}\,dt$$

Az integrandusz egy tört, ahol a számlálóban és a nevezőben a legmagasabb fokszámok megegyeznek. Ilyen esetben alakítsuk ki a számlálóban a nevező többszörösét, majd egyszerűsítsünk.

$$\int \frac{2t}{1+t} dt = \int \frac{2t+2-2}{1+t} dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\log|t+1|$$

Visszatértve az eredeti változóra:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1).$$

9-25 **Megoldás:**

Az integrandusz egy másodfokú polinom reciproka; a nevező gyökei nyilván különbözők ($0$ és $(-2)$, és a nevező már eleve szorzat alakú. Alkalmazzuk tehát a parciális törtekre bontást az integranduszban. A feladat: keressünk olyan $A$, $B$ valós számokat, melyekre $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ teljesül minden $x$-re (melyre a nevező $0$-tól különböző). Evégett először hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax + 2A + Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A}{x(x+2)}$$

A bal és jobb oldalon a két nevező egyenlő ($x(x+2)$). Így a két tört biztosan azonosan egyenlő, ha a számlálók azonosan egyenlők. Ez pedig biztosan teljesül, ha $A + B = 0$ és $2A = 1$. Ezt a kétismeretlenes egyenletrendszert egyszerűen megoldhatjuk. A megoldás: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Kaptuk, hogy:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$$

(amit közös nevezőre hozással könnyen ellenőrizhetünk).

Ez azt jelenti, hogy az integrál két egyszerűbb integrál összegére bomlik, melyek már nehézség nélkül kiszámíthatók:

$$\int \frac{1}{x(x+2)}\,dx = \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \log|x| - \frac{1}{2} \cdot \log|x+2|$$

Ez az előállítás minden olyan intervallumon érvénye, mely nem tartalmazza az integrandusz nevezőjének egyik gyökét sem, azaz sem a $0$, sem a $(-2)$ számot.

9-26 **Megoldás:**

**Megoldás:** Végezzük el a következő átalakítást:

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+1}\,dx$$

Ha $x^2$ a belső függvény, akkor a számlálóban majdnem a deriváltja van, csak egy $2$-es szorzó hiányzik.

Helyettesítsünk:

$$t := x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad \Rightarrow \qquad dt = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^4+1}2x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$$

*2. megoldás*: Helyettesítsünk kissé másképpen (most $x$-et tekintjük az új $t$ változó függvényének:

$$x := \sqrt{t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$$

9-27 **Megoldás:**

Az integrandusz számlálója és a nevezője egyaránt másodfokú polinom. Így első lépésként igyekezzünk kialakítani a számlálóban a nevező egy konstansszorosát: ez a nevezővel osztva egy konstanst ad (ami könnyen integrálható), a maradék pedig már egyszerűbb lesz:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{x^2+x-x+1}{x^2+x}\,dx = \int \left(1-\frac{x-1}{x^2+x}\right)dx = x - \int \frac{x-1}{x^2+x}\,dx$$

Elég már csak a jobb oldali integrállal foglalkozni. Itt a számláló elsőfokú, a nevező másodfokú: igyekezzünk tehát kialakítani a számlálóban a nevező deriváltját, hogy egy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrált kapjunk, amiről már tudjuk, hogy az $\log|f(x)|$:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

A jobboldali első integrál tehát már meghatározható:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \log|x(x+1)| = \log|x| + \log|x+1|.$$

Elég tehát csak a második integrállal foglalkozni. Ennek integranduszát bontsuk parciális törtek összegére, azaz keressünk olyan $A$, $B$ valós számokat, melyekre $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ teljesül minden olyan $x$-re, ahol egyik nevező sem $0$. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

A jobb oldali tört biztosan azonosan egyenlő $\frac{1}{x(x+1)}$-gyel, ha $A+B=0$, és $A=1$, azaz, ha $A=1$, és $B=-1$. Kaptuk, hogy:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

(ami persze közös nevezőre hozással azonnal ellenőrizhető). Így az utolsó integrál is számítható:

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \log|x| - \log|x+1|.$$

Már csak össze kell rakni a részeredményeket. Kapjuk, hogy:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx = x - \left(\frac{1}{2}\cdot(\log|x| + \log|x+1)) - \frac{3}{2}\cdot(\log|x| - \log|x+1|)\right) = x + \log|x| - 2\cdot\log|x+1|.$$

9-28 **Megoldás:**

Az integrandusz számlálója elsőfokú, nevezője másodfokú polinom. Igyekezzünk tehát először kialakítani a számlálóban a nevező deriváltját, hogy egy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrált kapjunk, amiről már tudjuk, hogy az $\log|f(x)|$:

$$\int \frac{x}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+6-6}{x^2+6x+11}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,dx - 3\cdot\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,dx$$

A jobb oldalon az első integrál már meghatározható:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,dx = \log|x^2+6x+11|,$$

így elég csak a második integrállal foglalkozni. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva nyomban látható, hogy a nevezőnek nincs valós gyöke (a diszkrimináns negatív). Így a nevező teljes négyzetté alakítható, majd kiemeléssel kapjuk, hogy:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

Helyettesítsünk:

$$t := \frac{x+3}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = t\sqrt{2}-3 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sqrt{2}\,dt$$

Innen:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{arctg} t$$

Visszatérve az eredeti $x$ változóra:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

Már csak össze kell rakni a részeredményeket. Kapjuk, hogy:

$$\int \frac{x}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \log|x^2+6x+11| - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

9-29 **Megoldás:**

Olyan tört áll az integrandusban, melynek számlálója konstans, nevezője pedig egy másodfokú polinom. A nevezőnek nincs valós gyöke, erről a másodfokú egyenlet megoldóképletével könnyen meggyőződhetünk (a diszkrimináns negatív). Így megkísérelhetjük a nevezőben teljes négyzetté alakítani, a számlálóból a konstanst pedig kiemelhetjük.

$$\int \frac{7}{25x^2+20x+13}\,dx = 7\cdot\int \frac{1}{(5x+2)^2+9}\,dx$$

Ezután emeljük ki a nevezőből a 9-et, hogy helyén 1 maradjon. (Azért tesszük ezt, mert a függvény így egyre jobban hasonlít majd az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegrálra.)

$$7\cdot\int \frac{1}{(5x+2)^2+9}\,dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1}\,dx$$

Az $\frac{(5x+2)^2}{9}$ kifejezést írjuk inkább $\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2$ alakban:

$$\frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1}\,dx = \frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}\,dx$$

Utolsó átalakításként pedig az $\frac{5x+2}{3}$ helyett használjuk inkább az $\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$ a alakot, valamint cseréljük meg a nevezőben a tagok sorrendjét.

$$\frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2}\,dx$$

Ezen alakból már jól látszik, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek külső függvénye az $\dfrac{1}{1+x^2}$ alapintegrál, belső függvénye pedig az $\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}$ lineáris függvény. Alkalmazzuk az ilyen összetett függvényekre vonatkozó $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}$ integrálási tételt.

A külső függvény integrálja: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$, és most $a=\dfrac{5}{3}$.

Végül az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{7}{25x^2+20x+13}\,dx = \frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{7}{9}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}} = \frac{7}{15}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)$$

*Megjegyzés*: Az utolsó integrált helyettesítéssel is kiszámíthatjuk. Legyen

$$t := \frac{5x+2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{3t-2}{5} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{3}{5}\,dt$$

Innen:

$$\frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{7}{9}\cdot\int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{3}{5}\,dt = \frac{7}{15}\cdot\operatorname{arctg} t = \frac{7}{15}\cdot\operatorname{arctg}\frac{5x+2}{3}$$

**9-30 Megoldás:**

Első lépésként írjuk a gyököt hatvány alakban.

$$\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \frac{1-x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Bontsuk két törtre az integrálandó törtet.

$$\int_1^4 \frac{1-x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\,dx$$

Az első tagot írjuk negatív kitevővel, a második tagban pedig végezzük el az osztást, így mindegyik tagban egyetlen hatványfüggvényt kapunk.

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\},dx = \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{1-\frac{1}{2}}\right)\,dx = \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx$$

Végezzük el a határozatlan integrálást.

$$\int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

Utolsó lépésként pedig vegyük a felső és az alsó határ helyettesítési értékének különbségét.

$$\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left(2\cdot 4^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2\cdot 1^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \left(4 - \frac{16}{3}\right) - \left(2 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

9-31 **Megoldás:**

Elsőként határozzunk meg egy primitív függvényt. Figyeljünk oda, összetett függvényt integrálunk lineáris belső függvénnyel, így a külső függvény integrálját osztani kell a belső függvényből $x$ együtthatójával.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

Helyettesítsük be a határokat, és vegyük a kapott értékek különbségét.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right)}{3} - \frac{\sin 3 \cdot 0}{3} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

9-32 **Megoldás:**

Elsőként határozzunk meg egy primitív függvényt. Összetett függvényt integrálunk lineáris belső függvénnyel, így a külső függvény integrálját osztani kell a belső függvényből $x$ együtthatójával.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \, dx = \left[ -\frac{\cos 3x}{3} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Helyettesítsük be a határokat, és vegyük a kapott értékek különbségét.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \, dx = \left[ -\frac{\cos 3x}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos(3 \cdot \pi)}{3} + \frac{\cos(-3 \cdot \pi)}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

*Megjegyzés*: Az eredményt számolás nélkül is megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy $x \mapsto \sin 3x$ páratlan függvény, és felhasználjuk, hogy páratlan (és folytonos) függvénynek egy tetszőleges, $0$-ra szimmetrikus intervallumon való integrálja szükségképpen $0$ (9-18 következmény).

9-33 **Megoldás:**

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy bár az integrandusz nincs értelmezve a $0$ helyen, de van határértéke, és az $0$ (bizonyítsuk ezt be!). Így, ha az integrandusz értelmezését kiterjesztjük a $0$-ra is (a függvényértéket $0$-nak definiálva), akkor a kiterjesztett függvény folytonos lesz a $[-2\pi, 2\pi]$ intervallumon, így Riemann-integrálható is ugyanott.

A feladat érdekessége, hogy a szokásos elemi függvények segítségével *primitív függvény nem állítható elő* (ezt nem bizonyítjuk). Az integrál értéke ennek ellenére meghatározható. Világos ugyanis, hogy az integrandusz *páratlan* függvény; az integrálás pedig egy $0$-ra szimmetrikus intervallumon történik, így az integrál szükségképp zérus (9-18 következmény).

9-34 **Megoldás:**

Elsőként egy primitív függvényt kellene elállítanunk. Ehhez alakítsuk át az integrandust. Bontsuk szorzattá a nevezőt, majd pedig az integrandust két tört szozatára.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

Mivel $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, így $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ helyett $\operatorname{tg}^2 x$ írható.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

Ebből az alakból már egyértelműen látható, hogy az integrandus most $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú, hiszen $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Felhasználva az ilyen függvényekre vonatkozó integrálási módszert, határozzunk meg egy primitív függvényt.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a két érték különbségét.

$$\left[\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^3 0\right) = \frac{1}{3}\,(1-0) = \frac{1}{3}.$$

**9-35 Megoldás:**

Az integrandus egy szorzat. Az egyik tényező polinom, a másik pedig a természetes alapú logaritmus, így a primitív függvény meghatározásához érdemes parciális integrálással próbálkozni. Célszerű először csak határozatlan integrált írni,azaz először csak a primitív függvényt keressük.

Legyen $u(x) := \log x$, és $v'(x) := x^3$. Ekkor $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, és $v(x) = \dfrac{x^4}{4}$.

Helyettesítsünk a parciális integrálás képletébe:

$$\int x^3 \cdot \log x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \log x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk.

$$\int x^3 \cdot \log x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \log x - \int \frac{x^3}{4} \, dx$$

Ezután határozzuk meg a primitív függvényt.

$$\int x^3 \cdot \log x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \log x - \frac{x^4}{16} = x^4 \left( \frac{\log x}{4} - \frac{1}{16} \right)$$

Most térjünk vissza a határozott integrálhoz.

$$\int_1^e x^3 \cdot \log x \, dx = \left[ x^4 \left( \frac{\log x}{4} - \frac{1}{16} \right) \right]_1^e$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a primitív függvénybe és vegyük a kapott értékek különbségét.

$$\int_1^e x^3 \cdot \log x \, dx = \left[ x^4 \left( \frac{\log x}{4} - \frac{1}{16} \right) \right]_1^e = e^4 \left( \frac{\log e}{4} - \frac{1}{16} \right) - 1^4 \left( \frac{\log 1}{4} - \frac{1}{16} \right) =$$

$$= e^4 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) - \left( \frac{0}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{16} e^4 + \frac{1}{16} \approx 10.30$$

9-36 **Megoldás:**

Az integrandusz egy exponenciális és egy trigonometrikus függvény szorzata. Célszerűnek látszik tehát parciális integrálással próbálkozni, a szereposztás közömbös.

Legyen $u(x) := e^x$, és $v'(x) := \sin x$. Ekkor $u'(x) = e^x$, és $v(x) = -\cos x$.

Jelölje a rövidség kedvéért $I$ a kiszámítandó Riemann-integrált.A parciális integrálás képlete szerint:

$$I = \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx = [-e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot (-\cos x) \, dx = [-e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cdot \cos x \, dx$$

Ugyanolyan típusú integrált kaptunk. Alkalmazzunk még egyszer parciális integrálást, méghozzá ugyanazzal a szereposztással, mint előbb.

Legyen $u(x) := e^x$, és $v'(x) := \cos x$. Ekkor $u'(x) = e^x$, és $v(x) = \sin x$.

A parciális integrálás képletét alkalmazva:

$$I = [-e^x \cos x]_0^\pi + [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx = [-e^x \cos x]_0^\pi + [e^x \sin x]_0^\pi - I$$

Látjuk tehát, hogy a jobboldalon ismét megjelent a kiszámítandó Riemann-integrál, azaz az integrált *saját magára vezettük vissza*. Ez néha semmitmondó azonossághoz vezet, sokszor azonban – ez esetben is – az így kapott egyenletből $I$ kifejezhető, azaz a Riemann-integrál meghatározható:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left([-e^x \cos x]_0^\pi + [e^x \sin x]_0^\pi\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-e^\pi \cos \pi - (-e^0) \cos 0 + e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0\right) = \frac{1}{2} \cdot (e^\pi + 1)$$

**9-37 Megoldás:**

Végezzünk helyettesítést. Legyen

$$t := \sqrt{3x+1} \qquad \Rightarrow \qquad t^2 = 3x+1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}(t^2-1) dx = \frac{2}{3} t\, dt$$

Az új változó szerinti határok:

$$\text{ha} \qquad x = 0, \quad \text{akkor} \qquad t = \sqrt{3 \cdot 0 + 1} = 1.$$

$$\text{ha} \qquad x = 5, \quad \text{akkor} \qquad t = \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 4.$$

Innen:

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\, dx = \int_1^4 \frac{\frac{1}{3}(t^2-1)}{t} \cdot \frac{2}{3} t\, dt$$

Egyszerűsítsünk $t$-vel és vigyük ki a konstans szorzókat az integráljel elé:

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\, dx = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1)\, dt = \frac{2}{9} \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_1^4 =$$

$$= \frac{2}{9} \left[ \frac{4^3}{3} - 4 - \left( \frac{1^3}{3} - 1 \right) \right] = \frac{2}{9} \left[ \frac{63}{3} - 3 \right] = \frac{2}{9} \cdot 18 = 4$$

9-38 **Megoldás:**

Végezzünk helyettesítést. Legyen

$$t := e^x \qquad \Rightarrow \qquad x = \log t \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{t} dt$$

Az új változó szerinti határok:

$$\begin{array}{llll} \text{ha} & x = 0, & \text{akkor} & t = e^0 = 1. \\ \text{ha} & x = 1, & \text{akkor} & t = e^1 = e. \end{array}$$

Innen:

$$\int_0^1 \frac{4}{e^x + 2}\, dx = \int_1^e \frac{4}{t+2} \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

Az új integrandusz egy valódi racionális törtfüggvény, ahol a nevező már eleve szorzat alakban van. Írjuk fel az integranduszt parciális törtek összegeként, azaz keressünk olyan $A$, $B$ számokat, melyekre

$$\frac{4}{(t+2)t} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t}$$

teljesül minden olyan $t$-re, ahol egyik nevező sem $0$. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t+2)}{(t+2)t} = \frac{(A+B)t + 2B}{(t+2)t}$$

Az így kapott törtkifejezés biztosan azonosan egyenlő az eredeti $\dfrac{4}{(t+2)t}$ törtkifejezéssel, ha $A + B = 0$, és $2B = 4$, azaz, ha $A = -2$, és $B = 2$. Kaptuk, hogy a nevezők zérushelyein kívül mindenütt

$$\frac{4}{(t+2)t} = \frac{-2}{t+2} + \frac{2}{t}$$

Ezt írjuk vissza az integráljel mögé, és folytassuk az integrálást:

$$\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}\,dx = \int_1^e \frac{4}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \left(\frac{-2}{t+2}+\frac{2}{t}\right)dt = 2\int_1^e \left(-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= 2[-\log|t+2| + \log|t|]_1^e = 2[-\log|(e+2)| + \log e - (-\log 3 + \log 1)] =$$

$$= 2[1 - \log|(e+2)| + \log 3] = 2\left[1 + \log\frac{3}{e+2}\right]$$

9-39 **Megoldás:**

Alkalmazzuk a forgástestek térfogatára vonatkozó képletet ($V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$).

$V = \pi \int_0^1 \left( \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\,dx$

A tört helyett írjunk inkább negatív kitevős hatvánnyal történő szorzást. Természetesen a gyököt is építsük be a kitevőbe.

$V = \pi \int_0^1 \left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}\,dx$

Mivel $\left(e^{2x}+1\right)' = 2e^{2x}$, ezért szorozzunk is és osszunk is 2-vel. Az osztást egyből az integráljel elé írjuk $\frac{1}{2}$-del való szorzás formájában.

$V = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2e^{2x}\right)\,dx$

Az integrandus ezen alakban $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusúvá vált, s így könnyen elvégezhető az integrálás: a primitív függvény $\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

$$V = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \pi \left[ \left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \pi \left[ \sqrt{e^{2x}+1} \right]_0^1 =$$

$$= \pi \left( \sqrt{e^{(2\cdot1)}+1} - \sqrt{e^{(2\cdot0)}+1} \right) = \pi \left( \sqrt{e^2+1} - \sqrt{2} \right) \approx 4.656$$

**9-40 Megoldás:**

Az $f$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhosszát az $[a,b]$ intervallum felett az alábbi összefüggés adja:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Ebbe a képletbe kell behelyettesítenünk a feladatban megadott függvény deriváltját és az intervallum végpontjait.

Elsőként deriváljuk a függvényt, azonban ehhez célszerű átalakítani, és egyetlen hatványként írni.

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Most helyettesítsünk az ívhossz képletébe.

$$|\Gamma| = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Így jól látható, hogy az integrandus olyan összetett függvény, melynek belső függvénye lineáris. Integrálnunk kell tehát a külső függvényt (ami hatványfüggvény), majd osztanunk kell a belső függvényből $x$ együtthatójával.

$$|\Gamma| = \left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{125}{64}-1\right) = \frac{61}{216}$$

**9-41 Megoldás:**

Az $f$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhosszát az $[a,b]$ intervallum felett az alábbi összefüggés adja:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Ebbe a képletbe kell behelyettesítenünk a feladatban megadott függvény deriváltját és az intervallum végpontjait. A derivált:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

Innen:

$$|\Gamma| = \int_1^e \sqrt{1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}\right)}\, dx = \int_1^e \sqrt{4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}}\, dx$$

A gyök alatt álló kifejezésben egy teljes négyzet ismerhető fel, s így eltűnik az integrandusból a négyzetgyök.

$$|\Gamma| = \int_1^e \sqrt{\left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \left(2x + \frac{1}{8x}\right)\, dx$$

Így már csak alapintegrálok szerepelnek az integrandusban, és innen:

$$|\Gamma| = \left[x^2 + \frac{\log x}{8}\right]_1^e = \left(e^2 + \frac{\log e}{8}\right) - \left(1^2 + \frac{\log 1}{8}\right) = \left(e^2 + \frac{1}{8}\right) - (1 + 0) = e^2 - \frac{7}{8} \approx 6.514$$

9-42 **Megoldás:**

Definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Az integrandusz egy primitív függvényét könnyen meghatározhatjuk, ha észrevesszük, hogy az integrandusz hatványfüggvény:

$$\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^b = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b$$

A jobb oldal $b\to\infty$ mellett vett határértékét könnyen kiszámíthatjuk, ha felhasználjuk a következőket:

$$b\to\infty \quad\Rightarrow\quad \sqrt{b}\to\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{b}}\to 0$$

Innen:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = 0+2=2$$

*Megjegyzés*: A levezetés lerövidítve

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^\infty = 0-(-2)=2$$

alakba írható, ahol a $[.]$ szimbólummal kapcsolatosan a felső határ $(+\infty)$ értelemszerűen *határértéket*, az alsó határ *helyettesítési értéket* jelent.

**9-43 Megoldás:**

Definíció szerint:

$$\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}\,dx$$

Az integrandusz egy primitív függvénye:

$$\int e^{-3x}\,dx = \frac{e^{-3x}}{-3}$$

Innen:

$$\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^b = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$b\to\infty \quad\Rightarrow\quad e^b\to\infty \quad\Rightarrow\quad e^{-b} = \frac{1}{e^b}\to 0.$$

*Megjegyzés*: A levezetés lerövidítve

$$\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^\infty = 0 - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

alakba írható, ahol a $[.]$ szimbólummal kapcsolatosan a felső határ $(+\infty)$ értelemszerűen *határértéket*, az alsó határ *helyettesítési értéket* jelent.

9-44 **Megoldás:**

Most az egyik integrációs határ sem véges. Ilyen esetben a feladatot visszavezetjük olyan esetre, amikor az egyik integrációs határ véges. Ha $f$ függvény folytonos és $c$ tetszőleges valós szám, valamint

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{és} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

improprius integrálok külön-külön léteznek, akkor definíció szerint legyen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

Mindenekelőtt keressünk egy primitív függvényt. Az integrandusz alig különbözik egy alapintegráltól (csak $x$ helyett $2x$ szerepel benne), így:

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}$$

Ezekután

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}\right]_{a}^{c} = \frac{\operatorname{arctg} 2c}{2} - \lim_{a\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2a}{2},$$

és hasonlóan:

$$\int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{c}^{a} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}\right]_{c}^{a} = \lim_{a\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2a}{2} - \frac{\operatorname{arctg} 2c}{2}.$$

Összeadáskor $\dfrac{\operatorname{arctg} 2c}{2}$ kiesik (azaz az improprius integrál értéke nem függ a $c$ szám megválasztásától, és kapjuk, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2a}{2} - \lim_{a\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2a}{2}$$

Mivel az arctg függvény határértéke $\infty$-ben $\frac{\pi}{2}$, $(-\infty)$-ben pedig $(-\frac{\pi}{2})$, azért innen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

*Megjegyzés*: A levezetés lerövidítve

$$\int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \left[\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

alakba írható, ahol a $[.]$ szimbólummal kapcsolatosan mindkét határ értelemszerűen *határértéket* jelent.

9-45 **Megoldás:**

Az integrandus nincs értelmezve $x = 0$ pontban, és ezen pont jobboldali környezetében nem korlátos. Definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$$

Az integrandusz egy primitív függvényét könnyen meghatározhatjuk, ha észrevesszük, hogy az integrandusz hatványfüggvény:

$$\int \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = -\int \frac{x}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx = -\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = -\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = -3\sqrt[3]{x}$$

Innen:

$$\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[-3\sqrt[3]{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-3\sqrt[3]{1} + 3\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = -3\cdot 1 + 3\cdot 0 = -3$$

ahol felhasználtuk, hogy a köbgyökfüggvény folytonos, így a 0-ban vett határértéke egyezik az ugyanitt vett helyettesítési értékével.

*Megjegyzés*: A levezetés lerövidítve (és kissé pontatlanul)

$$\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \left[-3\sqrt[3]{x}\right]_0^1 = \left(-3\sqrt[3]{1} + 3\sqrt[3]{0}\right) = -3\cdot 1 + 3\cdot 0 = -3$$

alakba írható.

9-46 **Megoldás:**

Az integrandus nincs értelmezve $x = 1$ pontban, és ezen pont baloldali környezetében nem korlátos. Definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

A primitív függvény meghatározásakor helyettesítsünk: legyen $x := \sin t$, akkor $dx = \cos t\,dt$ (mialatt $t$ befutja a $(0,\frac{\pi}{2})$ intervallumot, $x$ épp a $(0,1)$ intervallumot futja be; továbbá, mivel a $(0,\frac{\pi}{2})$ intervallumon a szinuszfüggvény egy-egyértelmű, itt van inverze, és így $t = \arcsin x$):

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = t = \arcsin x$$

Innen:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\arcsin x\right]_0^{1-\varepsilon} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

ahol felhasználtuk, hogy az arcsin függvény 1-ben balról folytonos, így az 1-ban vett baloldali határértéke egyezik az ugyanitt vett helyettesítési értékével.

*Megjegyzés*: A levezetés lerövidítve (és kissé pontatlanul)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$

alakba írható, ahol a fenti helyettesítést alkalmaztuk: a helyettesítés után nyert integrál már *nem* impropriust integrál.

**9-47 Megoldás:**

Definíció szerint:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

A jobb oldali (Riemann-) integrált pl. helyettesítéssel számíthatjuk ki. Legyen $t := e^x$, akkor $x = \log t$ és $dx = \frac{1}{t}\,dt$. Az új változóra vonatkozó integrálási határok: $t = 1$ és $t = e^b$. Innen:

$$\int_0^b \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^{e^b} \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

Az integranduszt parciális törtek összegére bontjuk, azaz keressünk olyan $A$ és $B$ számokat, hogy (a nevezők zérushelyeit kivéve) minden $t$-re

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t}$$

teljesüljön. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{At+B(t+1)}{(t+1)t} = \frac{(A+B)t+B)}{(t+1)t}$$

A két tört biztosan azonosan egyenlő, ha $A+B=0$ és $B=1$, ahonnan $A=-1$, és így:

$$\frac{1}{(t+1)t} = -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t}$$

Visszahelyettesítve az integranduszba ezt a kifejezést, az integrálás már könnyen elvégezhető:

$$\int_1^{e^b} \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \left[-\log|1+t| + \log|t|\right]_1^{e^b} = -\left[\log|1+t| - \log|t|\right]_1^{e^b} =$$

$$= -\left[\log\left|\frac{t+1}{t}\right|\right]_1^{e^b} = -\left[\log\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^{e^b} = -\log\left(1+\frac{1}{e^b}\right) + \log 2$$

Számítsuk ki a most kapott kifejezés határértékét $b \to \infty$ mellett:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^{e^b} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\, dt = -\log 1 + \log 2 = \log 2$$

Itt felhasználtuk, hogy ha $b \to \infty$, akkor $e^b \to \infty$, és így $\frac{1}{e^b} \to 0$, valamint azt, hogy a logaritmusfüggvény az $1$ helyen folytonos, így az itt vett határértéke egyezik az ugyanitt vett helyettesítési értékkel.

Kaptuk tehát, hogy:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+e^x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{e^b} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \log 2.$$

*Megjegyzés*: A levezetés lerövidítve: az alkalmazott helyettesítés esetén, ha $x$ befutja a $(0, +\infty)$ intervallumot, akkor $t$ befutja az $(1, +\infty)$ intervallumot, így:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{\infty} \left( -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} \right) dt = \left[ -\log|t+1| + \log|t| \right]_1^{\infty} =$$

$$= \left[ -\log \frac{1}{t+1} \right]_1^{\infty} = \left[ -\log \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \right]_1^{\infty} = -\log 1 + \log 2 = \log 2$$

Itt a $[.]$ szimbólummal kapcsolatosan a felső határ $(+\infty)$ értelemszerűen *határértéket*, az alsó határ *helyettesítési értéket* jelent.

# 27. lecke

# Közönséges differenciálegyenletek: példák, mellékfeltételek

# 10. Közönséges differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben a fizikai, mérnöki közgazdasági, biológiai stb. folyamatok matematikai modellezésének egyik leghatékonyabb eszközéről, a differenciálegyenletekről adunk bevezető ismereteket. A témakör részletes tárgyalása messze meghaladja e jegyzet terjedelmét, ezenkívül számos, itt nem tárgyalt matematikai eszközt is felhasznál. E fejezetben csak egy speciális rész, a *közönséges differenciálegyenletek* rövid áttekintésére és néhány megoldási módszerére szorítkozunk.

*Differenciálegyenlet* alatt olyan egyenletet értünk, ahol – az algebrai egyenletektől eltérően – nem ismeretlen *számokat*, hanem ismeretlen *függvényeket* kell meghatározni; az egyenletben pedig nemcsak az ismeretlen függvény, hanem annak deriváltja(i) is előfordul(nak).

Ha a differenciálegyenletben a meghatározandó függvény egyváltozós, akkor *közönséges*, ha többváltozós, akkor *parciális differenciálegyenletről* beszélünk. (Ez utóbbi esetben a differenciálegyenletben a meghatározandó függvény bizonyos parciális deriváltjai is szerepelnek.) A differenciálegyenlet *rendje* a benne előforduló legmagasabb rendű derivált rendje.

E jegyzet keretében kizárólag közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

Mielőtt a részletesebb tárgyalásba belefognánk, néhány példán keresztül megmutatjuk, hogy a valóságos folyamatok leírása hogyan történik differenciálegyenletekkel. Javasoljuk az Olvasónak az alábbi példák *részletes* tanulmányozását.

## 10.1. A valóságtól a differenciálegyenletig. Példák.

10-1. Példa: **Ejtőernyős ereszkedése.** Tegyük fel, hogy egy repülőgépből kiugrik egy ejtőernyős. Egy ideig szabadeséssel esik, majd egy időpontban – amit zérus időpillanatnak is tekinthetünk – ernyőt nyit. Ekkor lassulni kezd, és egy idő után a tapasztalat szerint gyakorlatilag állandó sebességgel ereszkedik, végül földet ér. Próbáljuk meg matematikailag leírni az időben változó folyamatot.

Mindenekelőtt látni kell, hogy egy sereg elhanyagolást, közelítést kell tenni, máskülönben a folyamat reménytelenül bonyolult. A főbb egyszerűsítő feltevések:

- az ejtőernyőst az ejtőernyővel együtt pontszerű tömegnek képzeljük;
- a mozgást függőleges egyenes menti mozgásnak tekintjük, azaz mind a vízszintes kezdősebesség-komponenenst, mind a szél hatását figyelmen kívül hagyjuk.

Jelölje ezekután $y(t)$ az ejtőernyős földfelszín feletti pillanatnyi pozícióját (a felszíntől mért távolságát), $v(t)$ pedig a pillanatnyi sebességét a $t$ időpillanatban. Legyen $m$ az ejtőernyős tömege, $g$ a nehézségi gyorsulás (kb. $9.81$ m/sec$^2$). Fizikai meggondolásokból levezethető (itt nem részletezzük), hogy az ejtőernyő egy (felfelé mutató) $F_0$ erővel fékezi az ejtőernyőst, ahol $F_0 = m \cdot c \cdot v^2$, ahol $c$ egy, az ejtőernyő alakjától és nagyságától függő arányossági tényező. Ugyanakkor az ejtőernyősre hat még a (lefelé mutató) $m \cdot g$ nagyságú nehézségi erő. A két erő eredője (azaz különbsége) fogja gyorsítani (helyesebben lassítani) az ejtőernyőst. Newton 2. törvénye szerint:

$$m \cdot a = m \cdot g - m \cdot c \cdot v^2,$$

ahol $a$ a pillanatnyi gyorsulás, mely maga is függ az időtől. Ismert ( ld. a 7-1 példát), hogy a sebesség épp az $y$ függvény, a gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltja: $v = y'$, $a = v'$, ahonnan azonnal $a = y''$ is adódik (a $t$ argumentumot az egyszerűség kedvéért mindenhol elhagytuk).

Innen a folyamat leírására két differenciálegyenletet is kaptunk. Ha $y$-t tekintjük meghatározandó függvénynek, akkor

$$\boxed{y'' = g - c \cdot (y')^2}$$

(ez másodrendű), ha pedig a $v$ sebességet, akkor

$$\boxed{v' = g - c \cdot v^2}$$

(ez elsőrendű).

Vegyük észre, hogy pusztán a fenti differenciálegyenletek egyikéből sem rekonstruálható egyértelműen a folyamat időbeli lefolyása. Szemléletesen nyilvánvaló, hogy ehhez kiegészítő adatok szükségesek, mégpedig, kézenfekvően, a $t = 0$ kezdeti időpontban érvényes magasság (azaz $y(0)$ értéke), és az ugyanekkor érvényes sebesség (azaz $y'(0)$ értéke, ami $v(0)$ értékével egyezik). Ha csak a sebesség időbeli lefolyására vagyunk kíváncsiak, tehát a folyamatot a második, $v$-re vonatkozó differenciálegyenlettel írjuk le, akkor persze $y(0)$ ismerete felesleges.

Hangsúlyozzuk, hogy a differenciálegyenlet felállításában kulcsszerepet játszott egy *fizikai törvény* (Newton 2. törvénye), valamint az, hogy a fellépő fizikai mennyiségek (sebesség, gyorsulás) maguk is más mennyiségek deriváltjai.

10-2. Példa: **Oldat hígítása.** Legyen egy $V$ térfogatú tartály valamilyen vízben oldott anyaggal tele (egyszerűség kedvéért legyen ez sós víz). Kezdjünk el folyamatosan, egyenletesen tiszta vizet tölteni a tartályba felül, és hagyjuk a sós vizet alul ugyanilyen ütemben távozni. A tartályban nyilván egyre hígabb lesz a sóoldat. Próbáljuk meg matematikailag leírni a hígulás folyamatát.

Jelölje $c(t)$ a $t$ időpillanatban érvényes sókoncentrációt a tartályban, azaz az egységnyi térfogatban levő oldott sómennyiséget. Ennek a $c$ függvénynek az időbeli lefutása írja le a hígulás folyamatát. Legyen $Q$ a hozzáfolyás hozama, azaz az időegység alatt a tartályba beáramló víz mennyisége (térfogata).

A leírást egyszerűsítendő, tegyük fel, hogy a koncentráció a tartályon belül mindenütt ugyanakkora: úgy képzelhetjük, hogy egy beépített keverőberendezés biztosítja, hogy a só eloszlása a tartály belsejében mindig egyenletes maradjon.

A matematikai modellezés alapötlete, most az, hogy tekintsük a koncentrációt egy $t$ időpillanatban ($c(t)$), és egy kis $\Delta t$ idővel később ($c(t+\Delta t)$). A két koncentráció nyilván nem egyezik, mert $\Delta t$ idő alatt az oldat hígult, belőle az elfolyó oldattal együtt valamekkora sómennyiség is eltávozott. A $\Delta t$ idő alatt eltávozott oldat térfogata nyilván $Q \cdot \Delta t$: ebben (jó közelítéssel) $Q \cdot \Delta t \cdot c(t)$ tömegű só van. Ugyanakkor a $t$ időpillanatban a tartályban levő teljes sótömeg $c(t) \cdot V$, a $t + \Delta t$ időpillanatben pedig $c(t+\Delta t) \cdot V$. A *tömegmegmaradás törvénye* értelmében a fenti tömegek különbsége épp az eltávozott oldatban levő sómennyiség, azaz:

$$c(t) \cdot V - c(t+\Delta t) \cdot V = Q \cdot \Delta t \cdot c(t),$$

ahonnan

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -\frac{Q}{V} \cdot c(t).$$

Ezekután a $\Delta t \to 0$ határátmenettel a

$$\boxed{c'(t) = -\frac{Q}{V} \cdot c(t)}$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenletet kapjuk.

A folyamat leírásához a differenciálegyenlet maga most sem elég: szemléletesen nyilvánvaló, hogy csak akkor kaphatunk valódi képet a folyamatról, ha a hígítás megkezdésének pillanatában, azaz a $t = 0$ időpontban ismerjük a tartályban érvényes $c(0)$ koncentrációértéket.

A meggondolásban egy további, hallgatólagos egyszerűsítés az volt, hogy $\Delta t$ olyan kicsi, hogy ilyen hosszúságú időintervallumon belül a $c(t)$ koncentráció nem változik, pontosabban: a koncentráció változását ilyen kis időtávon elhanyagoljuk. Szemléletesen világos, hogy ezzel az elnagyolással annál kisebb hibát követünk el, minél rövidebb a $\Delta t$ időtartam, így a $\Delta t \to 0$ határátmenet során várhatóan valóban egyenlőséget nyerünk.

Szemben az előző példával, itt a derivált maga nem egy fizikai törvényből adódott közvetlenül. Egy másik fizikai törvényt (tömegmegmaradás) alkalmaztunk a folyamat két, egymáshoz közeli (egymástól $\Delta t$-vel eltérő) időpontjára, *majd a* $\Delta t \to 0$ *határátmenet szolgáltatta a differenciálegyenletet*. Ez a fogás igen sok más esetben is alkalmazható.

Mindkét eddigi példában a keresett függvény argumentumának fizikai jelentése *idő* volt. Ez nincs mindig így, bár sok gyakorlati alkalmazásban ez a helyzet. Harmadik példánk esetében az argumentum hosszúság jelentésű.

10-3. Példa: **Elektromos áram áthaladása vezetőn.** Tekintsünk egy vékony, hosszú, de nem feltétlen mindenütt ugyanolyan vastagságú és/vagy anyageloszlású elektromos vezetékdarabot (azaz olyat, amelynek a hosszegységre vonatkoztatott elektromos vezetőképessége helyről helyre változhat). Kapcsoljunk áramforrást a vezeték két végpontjára, és próbáljuk meg leírni az elektromos feszültség eloszlását a vezeték hossza mentén.

Jelölje $L$ a vezeték hosszát, és legyen $x$ a vezeték bal végpontjától mért távolság. Jelölje $\sigma(x)$ a vezeték *relatív vezetőképességét* az $x$ pontban. Ez azt jelenti, hogy a vezeték egy rövid, $x$ és $x+\Delta x$ helyek közti szakaszának elektromos ellenállása (jó közelítéssel) $R=\frac{\Delta x}{\sigma(x)}$ (minél kisebb a $\Delta x$ hossz, annál jobb a közelítés). Jelölje $U(x)$ az elektromos feszültséget az $x$ helyen. Feladatunk az $U$ függvény előállítása, illetve egy differenciálegyenlet levezetése, melynek $U$ eleget tesz.

Az $x$ és $x+\Delta x$ pontok közt fellépő feszültségkülönbség nyilván $U(x+\Delta x)-U(x)$. Az Ohm-törvény miatt ezen vezetékszakaszon átfolyó áram erőssége:

$$I=\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\frac{\Delta x}{\sigma(x)}}=\sigma(x)\cdot\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}$$

Véve a $\Delta x\to 0$ határátmenetet: $I=\sigma(x)\cdot U'(x)$.

A *töltésmegmaradás törvénye* értelmében pedig a vezeték minden keresztmetszetén pontosan ugyanaz az áramerősség érvényes, azaz $I$ konstans a vezeték teljes hossza mentén, így deriváltja azonosan zérus. Így a következő (másodrendű) differenciálegyenletet kaptuk:

$$\boxed{(\sigma\cdot U')'=0}$$

Világos, hogy a jelenség leírásához, azaz az $U$ függvény meghatározásához ez a differenciálegyenlet nem elég: ehhez ismerni kell $U$ értékeit a végpontokban, azaz az $U(0)$ és $U(L)$ értékeket.

Amit most elhanyagoltunk:

- az elektromos feszültség változásait a vezeték bármely keresztmetszetén belül (másképp megfogalmazva, a vezetéket olyan vékonynak tekintjük, hogy a feszültség keresztirányú változásaitól eltekinthetünk);
- az időbeli változásokat (azaz a bekapcsoláskor lejátszódó rövid, átmeneti folyamatoktól eltekintünk);
- mindenféle elekromágneses hatást (azaz egyenáramú, vagy kisfrekvenciás váltóáramú jelenségre korlátozódunk);
- a $\sigma$ vezetőképesség esetleges változását a folyamat alatt (a valóságban $\sigma$ függhet a hőmérséklettől is, ami az átfolyó áram függvénye).

## 10.2. Differenciálegyenletek és mellékfeltételek. Megoldhatóság

A fenti példákat most már tisztán matematikai formában általánosítva, tekintsük a következő alakú elsőrendű differenciálegyenletet:

$$y'(x) = f(x,y(x))$$

vagy röviden:

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

ahol $f$ adott kétváltozós függvény, $y$ pedig az ismeretlen, meghatározandó függvényt jelöli. A 10-1 példa esetében pl. (most $y$-nak az ejtőernyős *sebességfüggvényét* jelölve) $f(x,y) = g - c \cdot y^2$, a 10-2 példa esetében ($y$-nal a koncentrációt jelölve): $f(x,y) = -\frac{Q}{V} \cdot y$.

Az $y$ függvényről tegyük fel, hogy egy $[x_0, x_0 + A]$ intervallumon értelmezett (akár $x_0 + A = +\infty$ mellett is). A differenciálegyenlet *megoldásának* olyan differenciálható $y[x_0, x_0 + A] \to \mathbf{R}$ függvényt nevezünk, mely minden $x_0 < x < x_0 + A$ esetén kielégíti a differenciálegyenletet, azaz $y'(x) = f(x,y(x))$ teljesül. (A differenciálegyenlet teljesülését az $x_0$ és az $x_0 + A$ végpontokban nem szokták megkövetelni.)

Egy differenciálegyenletnek, mint eddig is láttuk, ha van is megoldása, az általában nem egyértelmű: az a jellemző, hogy a megoldást kifejező formula (ha ilyen egyáltalán létezik) néhány szabadon megválasztható konstanst tartalmaz. A megoldások halmazából egy konkrét megoldás kiválasztása egyéb, *mellékfeltételeknek* nevezett egyenlőségek megkövetelésével történik: a példákban láttuk, hogy ezeknek a mellékfeltételeknek igen természetes fizikai jelentésük van.

Elsőrendű közönséges differenciálegyenletre a legtipikusabb mellékfeltétel a *kezdeti feltétel*, mely egyszerűen $y(x_0)$ előírását jelenti:

$$y(x_0) = y_0,$$

ahol $y_0 \in \mathbf{R}$ adott szám.

A differenciálegyenletet és a hozzácsatolt kezdeti feltételt röviden *kezdeti érték feladatnak* nevezzük.

A 10-1 és a 10-3 példákból általánosítva, másodrendű közönséges differenciálegyenlethez két független mellékfeltételt csatolunk. Ez történhet egyugyanazon pontban (10-1 példa, $y(0)$ és $y'(0)$ előírása), ekkor szintén kezdeti feltételről beszélünk. De történhet az értelmezési tartomány két végpontjában is (10-3 példa, $U(0)$ és $U(L)$ előírása): ezt *peremfeltételeknek*, a peremfeltételekkel ellátott differenciálegyenletet pedig *peremérték feladatnak* nevezzük.

Megjegyzés: A definíciókban nem törekedtünk a legnagyobb általánosságra. Szoktak még *implicit differenciálegyenleteket* is megkülönböztetni, melyek a következő alakúak ($n$-edrendű esetben):

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

ahol $F$ egy adott $(n+2)$-változós függvény. Ha ebből $y^{(n)}$ kifejezhető, azaz

$$y^{(n)}(x) = G(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x)) = 0,$$

ahol $G$ egy adott $(n+1)$-változós függvény, akkor ezt $n$-edrendű *explicit* differenciálegyenletnek nevezzük. Általános szabály (ennek mélyebb okait nem részletezzük), hogy egy $n$-edrendű differenciálegyenlethez $n$ db független mellékfeltételt kell csatolni, továbbá a mellékfeltételekben $n$-nél alacsonyabb rendű rendű deriváltak kell, hogy szerepeljenek: az egyértelmű megoldhatóság még így sem mindig biztosított. Jellemzőnek mondható megfigyelés a matematikai modellezésben az, hogy ha egy folyamatról egyéb, pl. fizikai meggondolások alapján *tudjuk*, hogy az egyértelmű, ugyanakkor a folyamatot leíró differenciálegyenlet és a hozzácsatolt mellékfeltételek alkotta matematikai problémának mégsincs megoldása avagy több is van, akkor a matematikai modell felállítása nagy valószínűséggel ügyetlen, vagy egyenesen hibás.

10-4. Példa: $y'^2 + 1 = 0$. A differenciálegyenletnek nincs (valós) megoldása, mert a bal oldal sehol sem kisebb 1-nél.

**10-5. Példa:** $y' = 2\sqrt{|y|}$ a $(0, +\infty)$ intervallumon, kezdeti feltétel: $y(0) = 0$. Ennek a kezdeti érték feladatnak végtelen sok megoldása van: az azonosan 0 függvény, továbbá az összes, az

$$y(x) := \begin{cases} (x-c)^2, & \text{ha } x \geq c \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < c \end{cases}$$

formulával definiált függvény (ahol $c \geq 0$ tetszőleges lehet) mind megoldás (ellenőrizzük!).

A következő két tétel az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek kezdeti érték feladatainak megoldhatóságát garantálják bizonyos feltételek mellett. A bizonyítás meghaladja e jegyzet kereteit, így elhagyjuk.

Tekintsük tehát az

$$y' = f(x,y), \quad (x > x_0), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

kezdeti érték feladatot, ahol az $y$ megoldásfüggvényt valamilyen $[x_0, x_0 + A]$ (akár félig végtelen) intervallumon kívánjuk értelmezni. $f$ adott kétváltozós függvény, $y_0 \in \mathbf{R}$ adott szám.

**10-1. Tétel:** (Peano) Ha $f$ értelmezett és folytonos az $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$ pont egy környezetében, akkor az (1) feladatnak van (legalább egy) megoldása, azaz van oly $A > 0$ szám és $y : [x_0, x_0 + A] \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény, hogy minden $x_0 < x < x_0 + A$-ra $y'(x) = f(x,y(x))$, és $y(x_0) = y_0$ teljesül.

**10-2. Tétel:** (Picard és Lindelöf) Ha $f$ értelmezett és folytonos az $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$ pont egy környezetében, és ugyanitt *második változójában kielégíti a Lipschitz-feltételt*, azaz e környezet minden $(x,y_1)$, $(x,y_2)$ pontjára alkalmas $L \geq 0$, $x$-től, $y_1$-től, $y_2$-től független konstans mellett teljesül az

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

egyenlőtlenség, akkor az előző tétel értelmében létező megoldás egyértelmű is.

Megjegyzés: A 10-2 tétel feltétele nem túl erős: igazolható, hogy ha a $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltfüggvény korlátos a szóban forgó környezetben, akkor $f$ a második változójában itt kielégíti a Lispchitz-feltételt is. Megjegyezzük viszont, hogy a 10-5 példa esetében (itt $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$) ez a feltétel mégsem teljesül, mert $\frac{\partial f}{\partial y} \to +\infty$, ha $y \to 0$. Nincs is egyértelműség: mint láttuk, végtelen sok megoldás létezik.

Megjegyzés: Peremérték feladatokra jóval bonyolultabb megoldhatósági tételek mondhatók ki: ezekkel a későbbiekben nem foglalkozunk.

A továbbiakban megoldhatósági kérdésekkel már nem foglalkozunk: bizonyos, speciális alakú differenciálegyenletek konkrét megoldási technikáit vázoljuk, előrebocsátva, hogy "általános recept" a differenciálegyenletek megoldására nincs, és igen sok differenciálegyenlet egyáltalán nem oldható meg analitikusan (azaz "képlettel", abban az értelemben, hogy a szokásos elemi függvények és műveletek *véges sokszori* alkalmazásával nem állítható elő a megoldás). Ilyen esetekben közelítő megoldási módszereket kell alkalmazni: a fejezet végén erre is mutatunk egy példát.

# 28. lecke

# Megoldási technikák elsőrendű közönséges differenciálegyenletekre

## 10.3. Néhány elsőrendű közönséges differenciálegyenlet megoldása

Legegyszerűbb formájú az

$$\boxed{y' = f(x)}$$

differenciálegyenlet: a jobb oldalon álló $f$ függvény tehát nem függ $y$-tól. Megoldása egyszerűen a jobb oldali függvény integrálásával történik, a megoldás

$$y(x) = F(x) + C$$

alakú, ahol $C$ egy tetszőleges konstans, $F$ pedig egy rögzített primitív függvénye $f$-nek: $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Ha az egyenlethez az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt csatoljuk, ebből a $C$ konstans meghatározható: $y(x_0) = F(x_0) + C = y_0$, ahonnan $C = y_0 - F(x_0)$, innen végül:

$$y(x) = F(x) - F(x_0) + y_0 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Ez a technika, azaz a kezdeti feltételből az integrálási állandó meghatározása, másféle differenciálegyenletek megoldásában is felhasználható.

10-6. Példa: $y' = x \cdot e^{-x^2} \quad (x > 0)$, a kezdeti feltétel legyen $y(0) = 0$.

*Megoldás*:

$$y(x) = \int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \int (-2x) e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

A $C$ konstanst a kezdeti feltételből határozzuk meg:

$$y(0) = -\frac{1}{2} e^{0} + C = 0,$$

ahonnan $C = \frac{1}{2}$. Tehát a kezdeti érték feladat (egyetlen) megoldása:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}. \qquad \square$$

### 10.3.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Ha a differenciálegyenlet

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}$$

alakú, azaz a jobb oldal két olyan függvény szorzata, hogy az egyik csak $x$-től, a másik csak $y$-tól függ, ezt *szétválasztható változójú* differenciálegyenletnek nevezzük. Ennek megoldása az

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

implicit egyenletből számítható. Valóban, a bal oldal deriváltja (az összetett függvény deriválási szabálya alpján) $\frac{1}{g(y)} \cdot y'(x)$, a jobb oldalé pedig $f(x)$.

A megoldás technikája könnyen megjegyezhető a következő formalizmus segítségével. Írjuk a differenciálegyenletet a hagyományos

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

alakba, majd $\frac{\partial y}{\partial x}$-et törtnek tekintve, gyűjtsük a bal oldalra az $y$-tól függő tagokat (beleértve $dy$-t is). a jobb oldalra pedig az $x$-től függő tagokat (beleértve $dx$-et is), azaz "válasszuk szét a változókat":

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx,$$

majd integráljuk mindkét oldalt (a bal oldalt $y$ szerint, a jobb oldalt $x$ szerint). Az eljárás matematikailag nem korrekt, de könnyen megjegyezhető, és, mint látjuk, helyes eredményre vezet.

**Megjegyzés:** Amennyiben $g$-nek az $y_1 \in \mathbf{R}$ szám gyöke, akkor a $g(y)$-nak való osztás értelmetlen e helyen. Nyilvánvaló viszont, hogy ekkor a differenciálegyenletnek az $y(x) \equiv y_1$ konstans függvény is megoldása.

**10-7. Példa:** $y' = -y^2 \cdot \cos x$ , ahol most csak a differenciálegyenlet megoldásira vagyunk kíváncsiak, kezdeti feltételt nem írunk elő.

*Megoldás*: A változókat szétválasztva:

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -\cos x\,dx$$

és integrálva:

$$-\frac{1}{y} = \sin x + C$$

ahonnan

$$y(x) = -\frac{1}{\sin x + C}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy ez a kifejezés nem minden $x$ argumentumra értelmes. Továbbá, mivel a differenciálegyenlet jobb oldalának $y$-tól függő tényezője $y^2$, és ennek a 0 szám gyöke, azért az előző megjegyzés értelmében a differenciálegyenletek még az $y(x) \equiv 0$ konstans függvény is megoldása.

**10-8. Példa:** $y' = x \cdot y \quad (x > 0), \qquad y(0) = 2.$

*Megoldás*: A változókat szétválasztva:

$$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$$

és integrálva:

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C,$$

ahonnan

$$y = e^{x^2/2} \cdot e^C, \qquad \text{és} \qquad y = -e^{x^2/2} \cdot e^C.$$

A kezdeti feltétel figyelembevételével világos, hogy csak az első lehetőség jön számításba, és

$$y(0) = e^C = 2,$$

ahonnan a megoldás:

$$y(x) = e^{x^2/2} \cdot e^{\log 2} = 2e^{x^2/2}.$$

### 10.3.2. Változóiban homogén differenciálegyenletek

Ezek általános alakja:

$$\boxed{y' = h\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ahol $h$ adott (egyváltozós) függvény.

Bevezetve az $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ új függvényt, innen $y(x) = x \cdot u(x)$, és $y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x) = h(u)$, azaz:

$$u'(x) = \frac{h(u) - u}{x} = \frac{1}{x} \cdot (h(u) - u),$$

ami már szétválasztható változójú, így az előző pontban leírt technikával megoldható. Ha pedig már $u$-t meghatároztuk, $y$-t nyilván az $y(c) = x \cdot u(x)$ formula állítja elő.

**10-9. Példa:**

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

*Megoldás*: Egyszerű algebrai átalakításokkal:

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x},$$

tehát a differenciálegyenlet változóiban homogén.

Legyen $u := \frac{y}{x}$, akkor $y' = u + x \cdot u' = \frac{1}{u} + u$, ahonnan:

$$u' = \frac{1}{x \cdot u}$$

A változókat szétválasztva:

$$u\,du = \frac{1}{x}\,dx$$

és integrálva:

$$\frac{1}{2}u^2 = \log|x| + C$$

Innen megoldásképp két formulát is nyerünk. Figyelembe véve $u$ definícióját:

$$y(x) = x \cdot \sqrt{2\log|x| + 2C}, \qquad \text{és} \qquad y(x) = -x \cdot \sqrt{2\log|x| + 2C}$$

Megjegyezzük, hogy az eddigi példáktól eltérően itt a $C$ konstans már nem lehet tetszőleges. Megengedett értéke attól függ, hogy a megoldást milyen intervallumon definiáljuk. Más megfogalmazásban: $C$ értékétől függ, hogy a megoldást milyen intervallumon lehet definiálni.

### 10.3.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Ezek általános alakja:

$$\boxed{y' + a(x) \cdot y = b(x)}$$

Ha $b(x) \equiv 0$, ahhor a differenciálegyenletet *homogénnek*, ellenkező esetben *inhomogénnek* nevezzük.

A *homogén egyenlet* szétválasztható változójú, így megoldási módszere már ismert. A változókat szétválasztva:

$$\frac{1}{y}\, dy = -a(x)\, dx$$

és integrálva:

$$\log |y| = -A(x) + C,$$

ahol $A$ jelölje az $a$ függvény egy primitív függvényét: $A(x) := \int a(x)\, dx$. Innen:

$$y = e^{-A(x)} e^{C} \qquad \text{vagy} \qquad y = -e^{-A(x)} e^{C}$$

A két képlet egyesíthető, mivel az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív számok halmaza:

$$y = c \cdot e^{-A(x)}$$

ahol a $c$ szám most már tetszőleges valós szám lehet, *beleértve a 0-t is* (amit elvesztettünk az $y$-nak való osztáskor).

Az *inhomogén egyenlet* egyik lehetséges megoldási módszere az *integráló tényezők módszere*. Jelölje továbbra is $A$ az $a$ függvény egy primitív függvényét, és szorozzuk be az inhomogén egyenlet mindkét eldalát az $e^{A(x)}$ *integráló tényezővel*:

$$y'e^{A(x)} + a(x) \cdot y \cdot e^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal épp $\left(ye^{A(x)}\right)'$-vel egyenlő, innen

$$ye^{A(x)} = \int b(x)e^{A(x)}\,dx$$

azaz

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x)e^{A(x)}\,dx$$

Megjegyzés: A $b(x) \equiv 0$ speciális esetben (homogén egyenlet) visszakapjuk az $y = c \cdot e^{-A(x)}$ formulát, ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans lehet.

10-10. Példa: Oldjuk meg az $y' + 6y = 7$ differenciálegyenletet.

*Megoldás*: Az azonosan 6 konstans függvény egy primitív függvénye: $A(x) := 6x$. Szorozzuk be tehát mindkét oldalt az $e^{6x}$ integráló tényezővel:

$$y' \cdot e^{6x} + 6y \cdot e^{6x} = 7e^{6x}$$

A bal oldal $\left(y \cdot e^{6x}\right)'$, ahonnan:

$$y \cdot e^{6x} = 7 \cdot \int e^{6x}\ ,dx = 7 \cdot \left(\frac{e^{6x}}{6} + C\right),$$

ahol $C \in \mathbf{R}$ tetszőleges. Innen végül:

$$y = \frac{7}{6} + 7Ce^{-6x}.$$

Egy másik lehetséges megoldási módszer "*az állandók variálásának módszere*". Itt először megoldjuk a megfelelő homogén egyenletet:

$$y' + a(x) \cdot y = 0$$

Már láttuk, hogy ennek megoldása

$$y = c \cdot e^{-A(x)}$$

alakú, ahol $A(x) = \int a(x)\,dx$. Ezekután az inhomogén egyenlet megoldását keressük ugyanilyen alakban, azzal a különbséggel, hogy most $c$-t egy (egyelőre ismeretlen) *függvénynek* tekintjük:

$$y := c(x) \cdot e^{-A(x)}$$

Az ilyen alakban feltételezett $y$ megoldást visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$y' + a(x) \cdot y = c'(x)e^{-A(x)} - c(x)A'(x)e^{-A(x)} + c(x)a(x)e^{-A(x)} = c'(x)e^{-A(x)},$$

hiszen definíció szerint $A'(x) = a(x)$. Innen az ismeretlen $c$ függvényre nézve a

$$c'(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

differenciálegyenletet nyerjük, ami egyszerűen megoldható:

$$c(x) = \int e^{A(x)} b(x)\,dx,$$

ahonnan végül:

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} b(x)\,dx,$$

az előző módszer eredményével egyezésben.

**10-11. Példa:** Oldjuk meg ismét az $y' + 6y = 7$ differenciálegyenletet, most az állandók variálásának módszerével.

*Megoldás*: A homogén egyenlet: $y' + 6y = 0$, melynek megoldása $y = c \cdot e^{-6x}$ ($c \in \mathbf{R}$ tetszőleges.) Ezekután keressük az *inhomogén* egyenlet megoldását

$$y = c(x) \cdot e^{-6x}$$

alakban. Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$y' + 6y = c'e^{-6x} - 6ce^{-6x} + 6ce^{-6x} = 7,$$

ahonnan $c'e^{-6x} = 7$, azaz $c' = 7e^{6x}$. Integrálva:

$$c = 7 \cdot \left( \frac{1}{6} e^{6x} + C \right)$$

ahol $C \in \mathbf{R}$ tetszőleges. Kaptuk tehát, hogy

$$y = 7 \cdot \left( \frac{1}{6} e^{6x} + C \right) e^{-6x} = \frac{7}{6} + 7Ce^{-6x},$$

egyezésben az előző példa eredményével.

**10-12. Példa:** Oldjuk meg az

$$xy' + y + x^2 = 0 \quad (x > 3), \qquad y(3) = 2$$

kezdeti érték feladatot.

*Megoldás*: A differenciálegyenletet először lineáris alakra hozzuk:

$$y' + \frac{1}{x} y = -x,$$

majd szorozzuk be mindkét oldalt az $e^{\log x} = x$ integráló tényezővel:

$$xy' + y = -x^2,$$

azaz $(xy)' = -x^2$. Integrálva:

$$xy = -\frac{1}{3}x^3 + C,$$

tehát a differenciálegyenlet megoldása:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}.$$

A $C$ konstans értékét a kezdeti feltételből határozzuk meg: az $x = 3$ helyen $y = 2$, így $2 = -\frac{9}{3} + \frac{C}{3}$, ahonnan $C = 15$. Tehát a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{15}{x}.$$

# 29. lecke

# Megoldási technikák másodrendű differenciálegyenletekre

## 10.4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Ezek általános alakja:

$$\boxed{y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)}$$

ahol $p$, $q$, $r$ adott függvények. Ha $r \equiv 0$, akkor az egyenletet *homogénnek*, ellenkező esetben *inhomogénnek* nevezzük.

E jegyzetben a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletet közül is csak az *állandó együtthatós* egyenletekkel foglalkozunk, azaz a továbbiakban feltesszük, hogy $p$, $q$ azonosan konstans függvények, azaz adott számok.

A *homogén egyenlet* tehát:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

**Megjegyzés:**

- Nyilvánvaló (pontosabban: a differenciálás alaptételeinek közvetlen következménye), hogy ha $y_1$, $y_2$ két tetszőleges megoldása a homogén egyenletnek, akkor tetszőleges $C_1$, $C_2$ számok mellett a $C_1y_1 + C_2y_2$ függvény is megoldása a homogén egyenletnek, Következésképp a homogén egyenlet megoldásai *legalább* kétdimenziós alteret alkotnak az **R**-en értelmezett valós függvények vektorterében.
- Megmutatható (nem bizonyítjuk), hogy a homogén egyenlet megoldásai *pontosan* kétdimenziós alteret alkotnak, így, ha $y_1$, $y_2$ két tetszőleges, lineárisan független megoldás (ezek együttesét a differenciálegyenlet egy *alaprendszerének* nevezzük), akkor *minden* megoldás szükségképp előáll $C_1y_1 + C_2y_2$ alakban (alkalmas $C_1$, $C_2$ együtthatókkal). Egy ilyen kifejezést *általános megoldásnak* nevezünk: vegyük észre, hogy ez – az elsőrendű differenciálegyenletektől eltérően – *két* független, szabadon megválasztható konstanst tartalmaz.

Keressük a homogén egyenlet megoldását $y = e^{\lambda x}$ alakban, ahol $\lambda$ egyelőre ismeretlen szám. Behelyettesítve ezt a feltételezett megoldást a differenciálegyenletbe:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0,$$

ahonnan a mindenütt pozitív $e^{\lambda x}$-szel való egyszerűsítés után a

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

*karakterisztikus egyenletet* nyerjük. Aszerint, hogy ennek hány különböző valós gyöke van, a megoldás további menete három, markánsan eltérő irányban halad tovább.

**1.eset**: A karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{R}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$. Ekkor az előző megjegyzés értelmében ($e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ lineárisan függetlenek!) a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

ahol $C_1,C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstansok.

**2.eset**: A karakterisztikus egyenletnek egyetlen valós gyöke van, $\lambda \in \mathbf{R}$. Már tudjuk, hogy ekkor $e^{\lambda x}$ megoldása a homogén egyenletnek. Azonban nem ez az egyetlen:

10-3. Állítás: Ha $\lambda \in \mathbf{R}$ az egyetlen valós gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $y := x \cdot e^{\lambda x}$ is megoldása a homogén egyenletnek

Bizonyítás:

Ekkor a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa 0, így $\lambda = -\frac{p}{2}$. Továbbá

$$y' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x},$$

$$y'' = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x},$$

és innen

$$y'' + py' + qy = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} + pe^{\lambda x} + p\lambda x e^{\lambda x} + qxe^{\lambda x} =$$
$$= \left[(2\lambda + p) + x \cdot (\lambda^2 + p\lambda + q)\right] \cdot e^{\lambda x} = 0,$$

mivel $\lambda = -\frac{p}{2}$, és $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. $\square$

Ez a megoldás nyilván lineárisan független $e^{\lambda x}$-től, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{\lambda x}$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstansok.

**3.eset**: A karakterisztikus egyenletnek egyetlen két (konjugált!) komplex gyöke van: $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, ahol $\omega \neq 0$. Ekkor érvényes az alábbi tétel:

**10-4. Tétel:** A fenti jelölésekkel

$$y_1 := e^{\alpha x} \cos \omega x \quad \text{és} \quad y_2 := e^{\alpha x} \sin \omega x$$

a homogén egyenlet két (nyilván lineárisan független) megoldása. Így az általános megoldás ilyen alakú:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x),$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstansok.

Bizonyítás:

Csak $y_1$-ről mutatjuk meg, hogy megoldás, $y_2$-ről ez pontosan ugyanígy bizonyítható. Kiszámítva $y_1$ deriváltjait:

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos \omega x - \omega e^{\alpha x} \sin \omega x$$

$$y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x} \cos \omega x - \alpha \omega e^{\alpha x} \sin \omega x - \alpha \omega e^{\alpha x} \sin \omega x - \omega^2 e^{\alpha x} \cos \omega x =$$
$$= [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega x - 2\alpha\omega \sin \omega x] e^{\alpha x},$$

ahonnan

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega x - 2\alpha\omega \sin \omega x + p\alpha \cos \omega x - p\omega \sin \omega x] \cdot e^{\alpha x} =$$
$$= [(\alpha^2 - \omega^2 + p\alpha + q) \cos \omega x + (-2\alpha\omega - p\omega) \sin \omega x] \cdot e^{\alpha x}$$

Megmutatjuk, hogy a jobb oldalon $e^{\alpha x}$ szorzója a szügletes zárójelben 0-val egyenlő, azaz $y_1$ valóban megoldása a homogén egyenletnek. A karakterisztikus egyenletben a diszkrimináns most negatív, ezért:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4q - p^2} = \alpha \pm i\omega,$$

ahonnan $\alpha = -\frac{p}{2}$, és $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$. Innen pedig

$$\alpha^2 - \omega^2 + p\alpha + q = \frac{p^2}{4} - \frac{4q - p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0,$$

és

$$-2\alpha\omega - p\omega = -\omega(2\alpha + p) = -\omega(-p + p) = 0,$$

ahogy állítottuk. □

**Megjegyzés:** Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, vázoljuk, hogy a tétel állítása hogyen vezethető le egyszerűbben, komplex értékű függvényeket is megengedve. Ha $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, akkor $e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos \omega x + i \sin \omega x)$, ahol felhasználtuk az 8-6 Euler-formulát. Hasonlóan, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$-ból: $e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} e^{-i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos \omega x - i \sin \omega x)$. És mivel $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ mindketten megoldásai a homogén egyenletnek, azért összegük fele (azaz $e^{\alpha x} \cos \omega x$), és különbségük $\frac{1}{2i}$-szerese (azaz $e^{\alpha x} \sin \omega x$) szintén megoldásai a homogén egyenletnek.

**10-13. Példa:** Keressük meg az $y'' + y' - 2y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, ennek gyökei $-2$ és $1$. Így az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x,$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

**10-14. Példa:** Keressük meg az $y'' + 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, ennek gyöke egyedül $\lambda = -3$ (kétszeres gyök). Így az általános megoldás:

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-3x},$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

**10-15. Példa:** Keressük meg az $y'' + 2y' + 5y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, ennek gyökei: $\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$, így az általános megoldás:

$$y = e^{-3x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

10-16. Példa: Keressük meg az $y'' - y' - 6y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, ennek gyökei: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$, azaz $3$ és $-2$. Így az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Megjegyzés: A példa eredménye olyan formába is írható, ami pontos analógiát mutat a konjugált komplex gyökök esetével (10-15 példa). Mint láttuk, a karakterisztikus gyökök alakja: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. Így a homogén egyenlet két megoldása: $y_1 = e^{x/2} e^{5x/2}$, és $y_2 = e^{x/2} e^{-5x/2}$. Ezért összegük fele (azaz $e^{x/2} \mathrm{ch} \frac{5x}{2}$), és különbségük fele (azaz $e^{x/2} \mathrm{sh} \frac{5x}{2}$) szintén megoldás. Tehát a homogén egyenlet általános megoldása

$$y = e^{x/2} \left( C_1 \,\mathrm{ch} \frac{5x}{2} + C_2 \,\mathrm{sh} \frac{5x}{2} \right)$$

alakba is írható, ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Végül foglalkozzunk az *inhomogén egyenlet* esetével:

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

(ahol a jobboldal nem feltétlen konstans függvény).

Az általános megoldás itt is két független konstanst tartalmaz. A megoldás alapötlete, hogy először megoldjuk a megfelelő homogén egyenletet: $y'' + py' + qy = 0$, jelölje $y_H$ ennek általános megoldását. Ezekután az inhomogén egyenletnek elég megtalálni *egyetlen* tetszőleges $y_P$ megoldását (melyet az általános megoldástól való megkülönböztetés miatt *partikuláris megoldásnak* nevezünk), mert:

**10-5. Tétel:** Az inhomogén egyenlet általános megoldása előáll egyetlen partikuláris $y_P$ megoldásának és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának összegeként, azaz $y_H + y_P$ alakban.

**Bizonyítás:**

Nyilván $y_H + y_P$ kielégíti az inhomogén egyenletet, mert

$$(y_H + y_P)'' + p(y_H + y_P)' + q(y_H + y_P) = (y_H'' + py_H' + qy_H) + (y_P'' + py_P' + qy_P) = 0 + r(x) = r(x).$$

Megfordítva, ha $y_0$ az inhomogén egyenlet egy tetszőleges megoldása, akkor $y_0 = (y_0 - y_P) + y_P$, de $y_0 - y_P$ kielégíti a homogén egyenletet:

$$(y_0 - y_P)'' + p(y_0 - y_P)' + q(y_0 - y_P) = (y_0'' + py_0' + qy_0) - (y_P'' + py_P' + qy_P) = r(x) - r(x) = 0,$$

azaz $y_0$ is előáll egy homogén megoldás és az $y_P$ partikuláris megoldás összegeként. $\square$

Ahhoz tehát, hogy az inhomogén egyenlet *összes* megoldását megkapjuk, elég *egyetlenegyet* megtalálni, és ebből, valamint a homogén egyenlet általános megoldásából már előállítható az összes többi megoldás is.

A kérdés már csak az, hogy hogyan tudunk az inhomogén egyenlet egy megoldását meghatározni. Sajnos, erre nézve könnyen használható, általános recept nincs. Az állandók variálásának módszere (ld. a 10-11 Példát) elvben most is működik: ha a homogén egyenlet általános megoldása $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ alakú, akkor megkísérelhetjük az inhomogén egyenlet egy megoldását $C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$ alakban keresni, ahol most $C_1$, $C_2$ egyelőre ismeretlen *függvényeket* jelöl. Sokszor azt is feltehetjük, hogy $C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) \equiv 0$. Ha ezt a feltételezett alakot visszahelyettesítjük az inhomogén egyenletbe, akkor némi számolás után adódik, hogy:

$$C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = r,$$

ami a korábbi $C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0$ feltétellel együtt egy kétismeretlenes lineáris (függvény)egyenletet ad az ismeretlen $C_1$ és $C_2$ függvény deriváltjaira, melynek megoldása után $C_1$ és $C_2$ integrálással adódnak. A módszer gyakorlati alkalmazása csak egyszerű esetekben javasolható, mert általában túl bonyolult integrálásokat kell elvégezni.

Néhány további irányadó ötletet foglal össze a következő táblázat:

| *Ha $r(x)$ ilyen alakú ...* | *... akkor $y_P$-t ilyen alakban keressük* |
|---|---|
| $k$-adfokú polinom | $k$-adfokú polinom |
| $\alpha \cdot \cos\omega x + \beta \cdot \sin\omega x \quad (\alpha,\beta \in \mathbf{R})$ | $a \cdot \cos\omega x + b \cdot \sin\omega x \quad (a,b \in \mathbf{R})$ |
| $c \cdot e^{\alpha x} \quad (c \in \mathbf{R})$ | $C \cdot e^{\alpha x} \quad (C \in \mathbf{R})$ |
| $e^{\alpha x}\cdot$($k$-adfokú polinom) | $e^{\alpha x}\cdot$($k$-adfokú polinom) |
| $e^{ux} \cdot (A_k(x)\cos vx + B_k(x)\sin vx)$ | $x^s \cdot e^{ux} \cdot (P_k(x)\cos vx + Q_k(x)\sin vx)$ |

A táblázat utolsó sorában $A_k$, $B_k$, $P_k$, $Q_k$ $k$-adfokú polinomokat jelölnek, *$s$ pedig azt jelöli, hogy az $(u+iv)$ szám hányszoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek* (ha egyáltalán gyök: ha nem gyök, akkor $s := 0$). Az $x^s$ szorzó nélkül (amennyiben $(u+iv)$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek) a $P_k$, $Q_k$ polinomok ismeretlen együtthatóit nem tudjuk kiszámítani. (Ilyenkor tehát előfordulhat, hogy az előző sorok ajánlásai sem vezetnek eredményre.) Speciálisan, ha $v = 0$, azaz $r(x) = e^{ux} \cdot A_k(x)$ alakú, akkor a partikuláris megoldást $y_P(x) := x^s \cdot e^{ux} \cdot P_k(x)$ alakban keressük, ahol $s$ most azt jelöli, hogy az $u$ szám hányszoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek. A részletektől itt eltekintünk, a jelenséget egy példán keresztül fogjuk szemléltetni.

**10-17. Példa:** Keressük meg az $y'' + y' - 2y = 20\cos 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A fenti táblázat ajánlása szerint próbáljunk meg egy

$$y_P := a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x$$

alapú partikuláris megoldást találni. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' - 2y_P = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 2a\sin 2x + 2b\cos 2x - 2a\cos 2x - 2b\sin 2x =$$

$$= (-6a + 2b)\cos 2x + (-2a - 6b)\sin 2x = 20\cos 2x.$$

Így $y_P$ biztosan megoldás, ha $-60 + 2b = 20$ és $-2a - 6b = 0$, azaz, az egyenletrendszert megoldva: $a = -3$, $b = 1$. Tehát egy partikuláris megoldás (ellenőrizzük!):

$$y_P = -3\cos 2x + \sin 2x.$$

Ugyanakkor már láttuk (10-13 példa) hogy a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x},$$

így a 10-5 tétel értelmében az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - 3\cos 2x + \sin x,$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

**10-18. Példa:** Keressük meg az $y'' + y' - 6y = e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A fenti táblázat ajánlása szerint próbáljunk meg egy

$$y_P := c \cdot e^x$$

alapú partikuláris megoldást találni. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' - 6y_P = c \cdot (e^x + e^x - 6e^x) = -4ce^x = e^x,$$

Így $y_P$ biztosan megoldás, ha $c = -\frac{1}{4}$. Tehát egy partikuláris megoldás (ellenőrizzük!):

$$y_P = -\frac{1}{4}e^x$$

A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, melynek gyökei: $\lambda = 2$ és $\lambda = -3$. Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x},$$

így a 10-5 tétel értelmében az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x-3} - \frac{1}{4}e^x,$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

**10-19. Példa:** Keressük meg az $y'' + y' - 6y = e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás*: A fenti táblázat ajánlása szerint próbáljunk meg egy

$$y_P := c \cdot e^{2x}$$

alapú partikuláris megoldást találni. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' - 6y_P = c \cdot (4e^x + 2e^x - 6e^x) \equiv 0 \neq e^{2x}$$

azaz a fenti alakú partikuláris megoldás *nem* létezik. *Ennek oka, hogy a jobb oldalon $x$ szorzója, azaz 2, most (egyszeres) gyöke a karakterisztikus egyenletnek*. Ezért a táblázat utolsó sorának ajánlása szerint, keressünk egy partikuláris megoldást

$$y_P := c \cdot x \cdot e^{2x}$$

alakban. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' - 6y_P = c \cdot (4e^{2x} + 4xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x} - 6xe^{2x}) = 5c \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

Így $y_P$ biztosan megoldás, ha $c = \frac{1}{5}$. Tehát egy partikuláris megoldás (ellenőrizzük!):

$$y_P = \frac{1}{5} x e^{2x}$$

A karakterisztikus egyenlet ismét: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, melynek gyökei: $\lambda = 2$ és $\lambda = -3$. Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x},$$

így a 10-5 tétel értelmében az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x-3} + \frac{1}{5} x e^{2x},$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

# 30. lecke

# Az Euler-módszer és tulajdonságai

## 10.5. Kezdeti érték feladatok közelítő megoldása: az Euler-módszer

Az eddigi megoldási technikákból látható, hogy formulával megadható, pontos megoldást eléggé ritka esetekben lehet csak várni. Ha viszont megelégszünk *közelítő* megoldásokkal, akkor az alkalmazhatósági kör lényegesen kibővül. Tekintsük ismét az egészen általános

$$y' = f(x,y) \qquad (x > x_0), \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

kezdeti érték feladatot, ahol az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $f$ mint kétváltozós függvény is kielégíti a Lipschitz-feltételt (nemcsak a második változójában):

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq L \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Tegyük fel, hogy a megoldásra az $A$ hosszúságú $[x_0, x_0 + A]$ intervallumban van szükségünk.

A közelítő megoldás technikájának alapötlete a következő. Legyen $N \in \mathbf{N}$ elég nagy, előre definiált egész, és osszuk fel az $[x_0, x_0 + A]$ intervallumot $N$ db egyenlő részre az $x_0, x_1, x_2, ...x_N$ osztópontokkal, ahol $x_k = k \cdot h$ $(k = 0,1,...,N)$, és $h := \frac{A}{N}$ a *lépésköz*. A megoldás közelítő értékeit eleve csak az $x_0, x_1, x_2, ...x_N$ alappontokban fogjuk definiálni. A differenciálegyenlet bal oldalán $y'(x_k)$ egy különbségi hányadossal közelítjük:

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h},$$

ahol $y_k$ az $y(x_k)$ (előre ismeretlen) értéket hivatott közelíteni. A jobb oldalt az $x_k$ helyen értelemszerűen az $f(x_k,y_k)$ helyettesítési értékkel közelítjük. Innen az alábbi explicit rekurziót nyerjük (*explicit Euler-módszer*):

$$\boxed{y_{k+1} := y_k + h \cdot f(x_k,y_k) \qquad (k = 0,1,...,N-1)}$$

ahol a rekurzió $y_0$ kezdőértéke a kezdeti feltételből adott.

10-20. Példa: Tekintsük a $[0,1]$ intervallumon kitűzött $y' = y, \quad y(0) = 1$ kezdeti érték feladatot, melynek pontos megoldása: $y = e^x$. Osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot $N$ egyenlő részre az $x_k := k \cdot h \quad (h := \frac{1}{N})$ alappontokkal. Akkor az explicit Euler-módszer a

$$y_{k+1} := y_k + h \cdot y_k = (1+h)y_k, \quad y_0 := 1 \qquad (k = 0,1,\ldots,N-1)$$

rekurzióra vezet.

Ezt a rekurziót könnyű megoldani. Felírva eggyel kisebb indexre:

$$y_k = (1+h)y_{k-1},$$

és ugyanezt alkalmazva a még kisebb indexekre:

$$y_k = (1+h)y_{k-1} = (1+h)^2 y_{k-2} = (1+h)^3 y_{k-3} = \ldots = (1+h)^k y_0 = (1+h)^k.$$

Mivel pedig $h = \frac{1}{N}$, és $x_k = \frac{k}{N}$ azért a közelítő megoldás:

$$y_k = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k = \left(\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N\right)^{x_k}$$

Mivel $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \to e \quad (N \to +\infty)$, ezért nagy $N$ esetén $y_k$ valóban a pontos $e^{x_k}$ értéket közelíti. A közelítés hibáját meg is becsülhetjük:

$$y(k) - y(x_k) = (1+h)^k - e^{x_k} = \left((1+h)^{1/h}\right)^{x_k} - e^{x_k} = e^{x_k \cdot \log a} - e^{x_k}$$

ahol $a := (1+h)^{1/h}$. Jelölje

$$\tilde{x}_k := x_k \cdot \log a = x_k \cdot \frac{\log(1+h)}{h},$$

akkor

$$y(k) - y(x_k) = e^{\tilde{x}_k} - e^{x_k}.$$

A *Lagrange-középértéktétel* (7-20) értelmében van olyan $\xi$ szám valahol $\tilde{x}_k$ és $x_k$ közt, hogy $y(k) - y(x_k) = e^{\xi} \cdot (\tilde{x}_k - x_k)$. Innen a hiba abszolút értéke:

$$|y(k) - y(x_k)| \leq e \cdot |\tilde{x}_k - x_k| \leq e \cdot x_k \cdot \left|1 - \frac{\log(1+h)}{h}\right| \leq e \cdot \left|1 - \frac{\log(1+h)}{h}\right|$$

A jobb oldalon: egyrészt az $1 + h \leq e^h$ (5-20 állítás) miatt $\log(1+h) \leq h$, így $\frac{\log(1+h)}{h} \leq 1$, ezért $1 - \frac{\log(1+h)}{h} \geq 0$, tehát az abszolút érték jel elhagyható. Másrészt pedig az ismert

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \ldots$$

Maclaurin-sorfejtés miatt (8-13 példa):

$$1 - \frac{\log(1+h)}{h} = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{4} - \ldots \leq \frac{h}{2}$$

(ui. a jobb oldal minden pozitív $h$ esetén egy váltakozó előjelű sor, melynek tagjai 0-hoz tartanak). Innen végül azt kapjuk, hogy

$$|y(k) - y(x_k)| \leq e \cdot \frac{h}{2} \leq 1.36 \cdot h \qquad (k = 0,1,\ldots,N)$$

A hiba abszolút értéke tehát bármely $x_k$ alappontban $k$ értékétől függetlenül $1.36 \cdot h$ alatt marad, azaz minél kisebb a lépésköz, annál pontosabb a módszer.

A most levezetett hibabecslés sokkal nagyobb általánosságban is igaz. A következő tétel bizonyítását – annak hosszadalmassága miatt – elhagyjuk.

**10-6. Tétel:** Tekintsük ismét az

$$y' = f(x,y) \qquad (x_0 < x < x_0 + A), \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

kezdeti érték feladatot, ahol $f$ kielégíti a Lipschitz-feltételt. Osszuk fel az $[x_0, x_0 + A]$ intervallumot az $x_0, x_1, ..., x_N$ alappontokkal $N$ egyenlő részre: $x_k := x_0 + k \cdot h, \quad h := \frac{A}{N}$. Akkor az Euler-módszer által nyert $y_1, y_2, \dots y_N$ közelítő megoldás hibájára teljesül, hogy

$$|y_k - y(x_k)| \leq C \cdot h \qquad (k = 1,2,...,N)$$

ahol a $C$ konstans csak az $f$ függvénytől és az intervallum $A$ hosszától függ, de nem függ a felbontás paramétereitől, azaz sem $N$-től, sem $h$-tól, sem pedig a $k$ indextől.

**Megjegyzés:** A tétel becslése gyakorlati célokra alig használható, mert a benne szereplő $C$ szám nehezen meghatározható, vagy túl nagy a gyakorlati becslésekhez. Elméleti jelentősége azonban igen nagy. Azt jelzi, hogy ha a felbontás finomságát növeljük, azaz a $h$ lépésközt csökkentjük az eredeti lépésköz valamilyen törtrészére, akkor a módszer maximális hibája is várhatóan az eredeti hibának kb. ugyanennyied részére csökken. Az ilyen módszereket *elsőrendű módszereknek* nevezzük. Konstruálhatók azonban ennél pontosabb, *p-edrendű módszerek* is ($p \geq 1$ egész), ahol a maximális hiba $h^p$ értékeivel arányosan becsülhető felülről. Elég kis lépésköz esetén ezek az elsőrendűnél sokkal pontosabb módszerek. Ilyen módszerekkel azonban e jegyzet keretein belül nem foglalkozunk.

### 10.5.1. Az aszimptotikus stabilitás megőrzése. Az implicit Euler-módszer

Az eddigi hibavizsgálatok esetében a differenciálegyenlet közelítő megoldását egy *rögzített, A hosszúságú intervallumon* állítottuk elő, és vizsgáltuk a hiba függését a lépésköztől.

A gyakorlatban sokszor nem ez a helyzet. Valamilyen megfontolásból *lerögzítünk egy $h$ lépésközt* (elegendően kicsit), és előállítjuk a közelítő megoldásértékeket az $x_1, x_2, x_3 \dots$ alappontsorozaton, ahol $x_k := x_0 + k \cdot h$. Az alappontok tehát nem maradnak egy rögzített intervallumban, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy a közelítő megoldás hogyan viselkedik az egyre távolabbi alappontokban: örökli-e a közelítő megoldás az eredeti feladat aszimptotikus viselkedését.

Egy sor fizikai folyamat (és az azt leíró differenciálegyenlet) olyan, hogy a megoldás határértéke a $+\infty$-ben konstans, bármilyen kezdeti értékből is indul a folyamat. (Ilyen pl. az oldat hígulását leíró 10-2 példa is.) Érdekes lehet tehát annak a vizsgálata, hogy ezt a tulajdonságot a közelítő megoldás megőrzi-e.

A problémát teljes általánosságban nem vizsgáljuk, az erősen meghaladná e jegyzet kereteit. Vizsgálatainkat az alábbi nagyon egyszerű, mégis jellemző modellfeladatra korlátozzuk:, melyet a $[0, +\infty]$ intervallumon tűzünk ki:

$$y' = -Ay \quad (x > 0), \qquad y(0) = y_0 \tag{2}$$

ahol $A \geq 0$ adott konstans. A pontos megoldás nyilván

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-Ax},$$

és nyilvánvaló, hogy $y(x) \to 0$, ha $x \to +\infty$, minden $y_0$ kezdeti feltétel esetén. Röviden azt mondjuk, hogy *a differenciálegyenlet azonosan 0 megoldása aszimptotikusan stabil*.

Legyen az Euler-módszer lépésköze $h$, és jelölje $x_k := j \cdot h$ az alappontokat ($k = 0,1,2,\dots$). Az Euler-módszer által adott közelítő megoldásra:

$$y_{k+1} = y_k - hAy_k \qquad (k = 0,1,2,\dots),$$

ami könnyen explicit sorozattá alakítható át:

$$y_k = y_{k-1} - hAy_{k-1} = (1 - hA)y_{k-1} = (1 - hA)^2 y_{k-2} = (1 - hA)^3 y_{k-3} = \dots = (1 - hA)^k y_0$$

Innen nyilvánvaló, hogy $y_k \to 0$ pontosan akkor teljesül, ha $-1 < 1 - hA < 1$, azaz, ha

$$0 < h < \frac{2}{A}$$

Tehát az aszimptotikus stabilitás nem minden lépésköz, csak minden *elég kicsi*, a fenti feltételt kielégítő $h$ lépésköz mellett öröklődik a közelítő megoldásra. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy az explicit Euler-módszer *feltételesen stabil*.

Ilyen szempontból lényegesen kedvezőbb az Euler-módszer *implicit* változata:

$$y_{k+1} = y_k - hAy_{k+1} \qquad (k = 0,1,2,\ldots),$$

ami szintén átalakítható explicit sorozattá. Nyilván $y_k = y_{k-1} - hAy_k$, azaz $(1 + hA)y_k = y_{k-1}$, ahonnan:

$$y_k = \frac{1}{1+hA}y_{k-1} = \frac{1}{(1+hA)^2}y_{k-2} = \frac{1}{(1+hA)^3}y_{k-3} = \ldots = \frac{1}{(1+hA)^k}y_0$$

Innen világos, hogy $y_k \to 0$ már minden pozitív $h$ lépésközre teljesül. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy az implicit Euler-módszer *feltétel nélkül stabil*.

Megjegyzés: Az aszimptotikus stabilitás öröklődésén kívül még fontos lehet pl. a módszer *pozitivitástartása* is: ha egy differenciálegyenlet megoldása minden $y_0 \geq 0$ kezdeti feltétel esetén nemnegatív marad (ilyenek pl. a hővezetést, vagy az oldott (szennyező)anyag koncentrációját leíró differenciálegyenletek: sem negatív hőmérsékletnek, sem negatív koncentrációnak nincs fizikai értelme), akkor a közelítő megoldástól elvárható, hogy rendelkezzék ugyanezzel a tulajdonsággal. A fenti $y' = -Ay \quad (A \geq 0$ modellfeladatnak nyilván minden $y_0 \geq 0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása ($y(x) = y_0 e^{-Ax}$) is nemnegatív. Ugyanakkor az explicit Euler-módszer esetén ez csak minden $0 < h < \frac{1}{A}$ lépésköz mellett, míg az implicit Euler-módszer esetén minden pozitív lépésköz mellett teljesül.

A fenti problémák ill. tulajdonságok fényében, vezessük be általánosan az Euler-módszer implicit változatát. Az

$$y' = f(x,y) \qquad (x > x_0), \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

kezdeti érték feladatra alkalmazott implicit Euler-módszert az

$$\boxed{y_{k+1} := y_k + h \cdot f(x_k, y_{k+1}) \qquad (k = 0,1,2,\dots)}$$

implicit rekurzió definiálja, ahol $y_0$ kezdőértéke most is a kezdeti feltételből adott. A gyakorlat szempontjából leglényegesebb különbség az explicit Euler-módszerhez képest, hogy ebből az egyenlőségből $y_{k+1}$-et még elő kell tudni állítani (legalább közelítően). Ez azt jelenti, hogy a rekurzió minden lépésében még egy egyenletmegoldó algoritmust is be kell építeni. Ez numerikus szempontból általában megdrágítja a módszert, cserébe viszont az implicit módszer, mint láttuk, az explicitnél lényegesen kedvezőbb kvalitatív tulajdonságokkal rendelkeznek (stabilitás, pozitivitástartás stb.)

Megjegyzés: Az implicit Euler-módszerben szükségképp fellépő egyenletmegoldás mindig történhet fixpont-iterációval (bár olykor egyéb, gyorsabb módszerek is szóba jöhetnek). Rögzített $k$ index esetén $y_{k+1}$ meghatározása ui. egyet jelent a

$$w = y_k + h \cdot f(x_k, w)$$

egyenlet megoldásával, azaz az $F(w) := y_k + h \cdot f(x_k, w)$ formulával értelmezett $F$ függvény fixpontjának meghatározásával. Jelöljük $L$-lel az $f$ függvény Lipschitz-konstansát, akkor

$$|F(w_1) - F(w_2)| = |y_k + h \cdot f(x_k, w_1) - y_k - h \cdot f(x_k, w_2)| = h \cdot |f(x_k, w_1) - f(x_k, w_2)| \leq h \cdot L \cdot |w_1 - w_2|,$$

ahonnan nyilvánvaló, hogy $F$ minden $h < \frac{1}{L}$ lépésköz mellett kontrakció, így a fixpontja fixpont-iterációval meghatározható (ld. a 6-9 tételt). Az iterációt célszerűen az $y_k$ értékből indítjuk: az

$$y_{k+1}^{(0)} := y_k, \qquad y_{k+1}^{(j+1)} := y_k + h \cdot f(x_k, y_{k+1}^{(j)}) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

$j$-re vonatkozó rekurziós sorozat $y_{k+1}$-het tart ($j \to +\infty$). A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy minden $k$ index esetén végre kell hajtani elegendően sok iterációs lépést $j$ szerint: a szükséges iterációs lépések száma annál kevesebb lehet, minél kisebb az $h \cdot L$ szorzat.

# 31. lecke

## Ellenőrző kérdések, feladatok

## 10.6. Ellenőrző kérdések

A teszfeladatokban végig $y$ jelöli a differenciálegyenlet meghatározandó függvényét, $x$ annak argumentumát. $C$, $C_1$, $C_2$ konstansokat jelölnek.

Begin Quiz Kattintson a Start-ra, a kvíz kitöltése után pedig a Stop-ra.

**1.** Csak az egyik differenciálegyenlet másodrendű. Melyik?

☐ $y^2y' + 3x^2y = e^2x$ ☐ $x^3y'' + (y')^3 = xy^4$ ☐ $x^2(y')^2 + y^2 = 5$ ☐ $y' + (y \sin x)^2 = x^2$

**2.** Csak az egyik differenciálegyenlet lineáris. Melyik?

☐ $x^2y + x^2y' + yy'' = 6$
☐ $\sqrt{x}y'' + \sqrt{y}y' + \sqrt{y}y^2 = 0$
☐ $e^{3x}y''' - 3y''e^x \sin x + \log(e^{3y}x) = 6x^6$
☐ $xy'' + 2yy' + x^2y = 1$

**3.** Csak az egyik differenciálegyenlet szeparábilis. Melyik?

☐ $xy' = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ ☐ $e^xy' = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}$ ☐ $yy' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ ☐ $xy' = \dfrac{e^x+e^y}{1+y^2}$

**4.** Ha egy populációban a népesség növekedését az $y' = \alpha y$ differenciálegyenlet írja le (alkalmas $\alpha > 0$ konstans mellett), és a népesség $T$ idő alatt megduplázódik, akkor mennyi idő alatt háromszorozódik meg?

☐ $\dfrac{3}{2}T$ ☐ $\left(\log \dfrac{3}{2}\right) T$ ☐ $\dfrac{\log 3}{\log 2}T$ ☐ $\dfrac{1}{\log \frac{2}{3}}T$

**5.** A sütőből a $200$ °C-os sültet kivéve, és a $20$ °C-os ebédlőbe hozva, az $5$ perc alatt $110$ °C-orra hűl. Újabb $5$ perc elteltével hány fokos lesz? (Feltesszük, hogy a Newton-féle lehűlési törvény érvényes.)

- [ ] 55 °C
- [ ] 60.5 °C
- [ ] 65 °C
- [ ] 75 °C

**6.** Az $xy' + y = 2x^2$ differenciálegyenletet az integráló tényezők módszerével megoldva, mi a helyes integráló tényező?

☐ $e^{-3x^2/2}$ ☐ $e^{-2x^2/3}$ ☐ $e^{-3x/2}$ ☐ $e^{2x/3}$

**7.** Mi az $y' = -xy$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $-\frac{1}{2}x^2 + C$ ☐ $e^{-Cx^2/2}$ ☐ $\frac{1}{2}e^{-x^2}$ ☐ $Ce^{-x^2/2}$

**8.** Mi az $xy' + y = 2x^2$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $\frac{2}{3}x^2 + \frac{C}{x}$ ☐ $\frac{2}{3}x^2 + C$ ☐ $e^x \int 2x^2 e^{-x}\, dx$ ☐ $-\frac{2}{3}x + \frac{C}{x^2}$

**9.** Mi az $y'' - y' - 12y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $C_1e^{-4x} + C_2e^{3x}$ ☐ $C_1e^{-x} + C_2e^{12x}$ ☐ $C_1e^{4x} + C_2e^{-3x}$ ☐ $-C_1e^{x} + C_2e^{-12x}$

**10.** Mi az $y'' - 6y' + 13y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
☐ $e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
☐ $e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
☐ $e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

**11.** Mi az $y'' - 5y' = 5$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $C_1 + C_2e^{5x}$ ☐ $C_1 + C_2e^{-5x}$ ☐ $C_1x + C_2e^{5x}$ ☐ $-x + C_1 + C_2e^{5x}$

**12.** Tekintsük a $(0, +\infty)$ intervallumon kitűzött $y' = -8y + 8$ differenciálegyenletet, melynek az $y \equiv 1$ konstans függvény megoldása. Alkalmazva erre egy $h > 0$ lépésközű Euler-módszert, mi állítható a megoldást az $x_n := n \cdot h$ rácspontokban közelítő $y_n$ értékekről?

- ☐ Explicit Euler-módszernél minden $h > 0$ lépésköz esetén $y_n \to 1$.
- ☐ Explicit Euler-módszernél csak az $y_0 := 1$ kezdeti feltétel mellett teljesül, hogy $y_n \to 1$.
- ☐ Implicit Euler-módszernél minden $h > 0$ lépésköz esetén $y_n \to 1$.
- ☐ Implicit Euler-módszernél csak az $y_0 := 1$ kezdeti feltétel mellett teljesül, hogy $y_n \to 1$.

End Quiz

Score:

## 10.7. Feladatok

**10-1. Feladat:** Az $y \cdot y' = \frac{1}{2}$ nemlineáris differenciálegyenletet a $(0, +\infty)$ intervallumon három különböző függvény is kielégíti, melyek a következő képletekkel értelmezettek: $y(x) :\equiv 0$, $y(x) := \sqrt{x}$, $y(x) := -\sqrt{x}$ (ellenőrizzük!) Mindhárom függvény eleget tesz az $y(0) = 0$ kezdeti feltételnek is. Nem mond-e ez ellent a differenciálegyenletek megoldásának egyértelműségéről szóló tételnek?

Megoldás: itt

---

**10-2. Feladat:** Melyik az a maximális $[0, A)$ $(A > 0)$ alakú intervallum, melyre az $y' = y^2$, $y(0) = 1$ kezdeti érték feladat megoldása kiterjeszthető?

Megoldás: itt

---

**10-3. Feladat:** Tekintsük a fejezet bevezetőjében említett, az ejtőernyős ereszkedésére vonatkozó feladatot (10-1 példa). Tegyük fel, hogy az ernyő nyitásának pillanatában (amit zérus időpillanatnak tekintünk) az ejtőernyős sebessége $40$ m/sec volt. Legyen a fékezőerőt jellemző tényező értéke $c := 0.4$ 1/m. Határozzuk meg az ejtőernyős sebességének időbeli alakulását és az állandósult sebességet. (A nehézségi gyorsulás értékét közelítően $10$ m/sec$^2$-nek vehetjük.)

Megoldás: itt

---

**10-4. Feladat:** A rádium bomlási sebessége arányos a jelenlevő, még el nem bomlott rádium mennyiségével. A bomlás felezési ideje 1590 év. A kiindulási mennyiség hány százaléka bomlik el 200 év alatt?

Megoldás: itt

**10-5. Feladat:** Teába $10$ g cukrot szórunk. Az egyenletes oldódást folyamatos kevergetéssel érjük el. Az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldott cukor mennyiségével. Ha $15$ sec alatt $4$ g cukor oldódott fel, akkor mennyi idő kell még, hogy további $4$ g oldódjék fel?

Megoldás: itt

**10-6. Feladat:** Egy álló henger alakú (alapkörének sugara legyen $R$) tartály aljába kicsiny, kör alakú lyukat vágunk (sugara legyen $r$, ahol $r << R$). Mennyi idő alatt folyik ki a tartályból az összes folyadék, ha kezdetben $H$ magasságig töltötte meg a tartályt? Használjuk fel a *Torricelli-féle kiömlési törvényt*, mely szerint, ha $h$ a pillanatnyi folyadékszint a tartályban, akkor a kiömlés sebessége $\sqrt{2gh}$ ($g \approx 9.81 \mathrm{m/sec}^2$ a nehézségi gyorsulás).

Megoldás: itt

**10-7. Feladat:** Kis vasgolyót forrásban levő vízbe teszünk, majd $20$ °C hőmérsékletű szobába viszünk. A golyó $1$ perc alatt $30$ °C-ot hűl. Mennyi idő kell még, hogy újabb $30$ °C-ot hűljön? Használjuk fel a *Newton-féle hűlési törvényt*, mely szerint, ha $T_k$ a környező hőmérséklet, és $T$ a test pillanatnyi hőmérséklete, akkor a hűlés sebessége a $(T - T_k)$ hőmérsékletkülönbséggel arányos.

Megoldás: itt

**10-8. Feladat:** Legyen egy állandó létszámú közösségben $y(t)$ azon emberek számának részaránya, akik a $t$ időpontban egy bizonyos (rém)hír (avagy más fontos információ) birtokában vannak: nyilván $0 \leq y(t) \leq 1$, és $1 - y(t)$ azok részaránya, akik még nem tudják a hírt. A közösség tagjai időről időre véletlenszerűen találkoznak egymással: tegyük fel, hogy minden találkozás alkalmával ugyanolyan gyakorisággal lesz említve a hír (feltéve, hogy a találkozás egyik részvevője már ismeri), ami így továbbterjed (feltéve, hogy a találkozás másik résztvevője még nem ismerte). Tegyük fel, hogy a hírt kezdetben a közösség $1\%$-a ismerte, és $5$ nap múlva már $10\%$-a. Hány nap alatt terjed a hír a közösség 50%-ára?

Megoldás: itt

---

**10-9. Feladat:** Határozzuk meg az $x^2y' = y^2$ differenciálegyenletnek a $(0, +\infty)$ intervallumon értelmezett általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-10. Feladat:** Határozzuk meg az $x^3y' = x^2y + xy^2$ differenciálegyenlet általános megoldását $(x > 1)$, valamint az $y(1) = -\frac{1}{2}$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-11. Feladat:** Határozzuk meg az $y' = \dfrac{2y}{x}$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-12. Feladat:** Határozzuk meg az $y' - xy = x$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-13. Feladat:** Határozzuk meg az $y' + \frac{y}{x} + e^x = 0$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-14. Feladat:** Határozzuk meg az $y' = -\frac{2}{x} \cdot y + \frac{1}{x^2+1}$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-15. Feladat:** Határozzuk meg az $y' - 3x^2y = 6x^2$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-16. Feladat:** Oldjuk meg az $(1, +\infty)$ intervallumon kitűzött $y' - \frac{2}{x} \cdot y = x$ elsőrendű lineáris differenciálegyenletet az $y(1) = 3$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás: itt

---

**10-17. Feladat:** Oldjuk meg a $(0, +\infty)$ intervallumon kitűzött $y' - \frac{x}{x^2+4} \cdot y = 6x$ elsőrendű lineáris differenciálegyenletet az $y(0) = 4$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás: itt

---

**10-18. Feladat:** Egy pontszerű, $m$ tömegű testet rugóra akasztunk, és függőleges irányban kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük. Jelölje $x(t)$ az rugó nyugalmi állapotbeli végpontjától mért függőleges irányú kitérést a $t$ időpillanatban (a kitérés előjeles, a lefelé irányú kitérést tekintjük pozitívnak.) Írjuk fel a tömegpont mozgását leíró, $x$-re vonatkozó differenciálegyenletet, és határozzuk meg az általános megoldást. Használjuk fel a *Hooke-törvényt*, mely szerint, ha a kitérés $x$, akkor a testre ható rugóerő $F = -Dx$, ahol $D$ a rugóra jellemző pozitív konstans.

Megoldás: itt

---

**10-19. Feladat:** Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 4y = \cos 3x$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-20. Feladat:** Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 4y = 1 - 4x^2$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-21. Feladat:** Határozzuk meg az $y'' + y' - 12y = 2\sin 2x$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-22. Feladat:** Határozzuk meg az $y'' + y' - 12y = x \cdot e^{2x}$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-23. Feladat:** Határozzuk meg az $y'' + y' - 12y = x \cdot e^{3x}$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

---

**10-24. Feladat:** Határozzuk meg az $y'' + y = 2\cos x + 3\sin x$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: itt

**10-25. Feladat:** Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 0$ másodrendű lineáris differenciálegyenletet az $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás: itt

**10-26. Feladat:** Oldjuk meg az $y'' - 4y' - 13y = 0$ másodrendű lineáris differenciálegyenletet az $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás: itt

**10-27. Feladat:** Oldjuk meg az $y'' + y = \sin x$ másodrendű lineáris differenciálegyenletet az $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás: itt

**10-28. Feladat:** Mutassuk meg, hogy az $y' = x$, $y(0) = 0$ $(x \in [0,1])$ kezdeti érték feladatra alkalmazott explicit Euler-módszer által adott közelítő megoldására bármely $x_n = nh$ $(n = 0,1,2,\ldots,N,\ h = \frac{1}{N})$ rácspontban teljesül az $|y_n - y(x_n)| \leq \dfrac{1}{2}h$ becslés, tehát a közelítő megoldás hibája legfeljebb a $h$ rácsméret fele.

Megoldás: itt

**10-1 Megoldás:**

Nem. A differenciálegyenleteket a szokásos $y' = f(x,y)$ alakra hozva: $y' = \frac{1}{2y}$, azaz $f(x,y) = \frac{1}{2y}$. Ez a kétváltozós függvény pedig nem is értelmezett az $x = 0$, $y = 0$ helyen, és ennek semmilyen környezetében nem elégíti ki a Lipschitz-feltételt: az egyértelműségi tétel tehát nem alkalmazható.

**10-2 Megoldás:**

Tudjuk, hogy $x \mapsto -\frac{1}{x}$ olyan függvény, melynek deriváltja ($x \mapsto \frac{1}{x^2}$) egyezik a függvény négyzetével: sőt, az összes $x \mapsto \frac{1}{C-x}$ alakú függvény ilyen ($C \in \mathbf{R}$). Válasszuk ki ezek közül azt, amelyik teljesíti a kezdeti feltételt: ez $C := 1$ választással érhető el. Azaz a kezdeti érték feladat egy megoldása: $y := \frac{1}{1-x}$ alakban írható. A differenciálegyenlet jobb oldala ($f(x,y) := y^2$) mindenütt folytonos, és a $(0,1)$ pont egy környezetében kielégíti a Lipschitz-feltételt (miért?) A megoldás tehát egyértelmű is, és legfeljebb nyilván csak a $[0,1)$ intervallumra terjeszthető ki, mert az $x = 1$ helyen nem értelmezett, és baloldali határértéke $(+\infty)$.

10-3 **Megoldás:** A folyamatot leíró kezdeti érték feladat (ld. a 10-1 példát):

$$v' = g - c \cdot v^2, \qquad v(0) = v_0$$

A konkrét adatokkal:

$$v' = 10 - 0.4 \cdot v^2, \qquad v(0) = 40$$

Ez szeparábilis differenciálegyenlet. A változókat szétválasztva:

$$\frac{1}{0.4v^2 - 10} = -dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{v^2 - 25} = -0.4\, dt$$

Integrálva:

$$\int \frac{1}{v^2 - 25}\, dv = -0.4\, t + C$$

A bal oldali integranduszt parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{1}{v^2 - 25} = \frac{1}{(v-5)\cdot(v+5)} = \frac{A}{v-5} + \frac{B}{v+5} = \frac{Av + 5A + Bv - 5B}{(v-5)(v+5)} = \frac{(A+B)v + (5A - 5B)}{(v-5)(v+5)}$$

A bal és a jobb oldal azonosan egyenlő, ha $A + B = 0$, és $5A - 5B = 1$. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $A = \frac{1}{10}$, és $B = -\frac{1}{10}$ (ellenőrizzük!) Az integrandusz tehát a következő alakú:

$$\frac{1}{v^2 - 25} = \frac{1}{10} \cdot \left( \frac{1}{v-5} - \frac{1}{v+5} \right)$$

Az integrálás így már könnyen elvégezhető. Kapjuk, hogy:

$$\int \frac{1}{v^2 - 25}\, dv = \frac{1}{10} \int \left( \frac{1}{v-5} - \frac{1}{v+5} \right) dv = \frac{1}{10} \left( \log|v-5| - \log|v+5| \right) = \frac{1}{10} \log \left| \frac{v-5}{v+5} \right| = -0.4\, t + C$$

A $C$ integrálási állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ha $t = 0$, akkor $v = 40$, innen

$$\frac{1}{10}\log\left|\frac{v-5}{v+5}\right| = -0.4\,t + \frac{1}{10}\log\frac{35}{45}$$

azaz

$$\log\left|\frac{v-5}{v+5}\right| = -4\,t + \log\frac{35}{45}$$

Véve mindkét oldal exponenciálisát:

$$\left|\frac{v-5}{v+5}\right| = \frac{35}{45}e^{-4t}$$

(a jobb oldalon elvileg negatív előjel is állhatna, de ez nem ad megoldást, mert ekkor a kezdeti feltétel nem teljesül.) Az egyenletből $v$ már egyszerűen kifejezhető:

$$\boxed{v(t) = 5\cdot\frac{45+35e^{-4t}}{45-35e^{-4t}}}$$

Az állandósult sebesség a $t \to +\infty$ melletti határérték, ami nyilván $v_{ll} = 5$ m/sec, mivel $e^{-4t} \to 0$, ha $t \to +\infty$.

*Megjegyzés*: Az állandósult sebesség sokkal egyszerűbben megkapható fizikai meggondolásokból. Ha a sebesség már állandósult, azaz konstans, akkor $v' \equiv 0$, innen $10 - 0.4v^2 = 0$, azaz $v = 5$ m/sec. Megjegyezzük még, hogy az állandósult sebesség – amint azt az előző fizikai meggondolás is mutatja – *független a $v_0$ kezdősebességtől*. Javasoljuk, hogy az Olvasó próbálja meg a fenti differenciálegyenletet megoldani teljes álltalánosságban, azaz a $c$ és $v_0$ értékeket paraméterként megtartva, és mutassa meg, hogy az állandósult sebesség $v_0$-tól függetlenül $\sqrt{\frac{g}{c}}$-vel egyenlő.

10-4 **Megoldás:** Jelölje $m(t)$ a $t$ időpillanatban jelenlevő, még el nem bomlott rádium mennyiségét, akkor a feladatkitűzés szerint:

$$m'(t) = -\alpha \cdot m(t)$$

Az $\alpha$ konstans egy egyelőre még ismeretlen pozitív szám: a negatív előjel arra utal, hogy $m(t)$ az idő előrehaladtával csökken, így deriváltja negatív. A $t = 0$ időpillanatban érvényes kezdeti tömeget jelölje $m_0$.

A differenciálegyenlet szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{m}\,dm = -\alpha\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \log|m| = -\alpha\,t + C$$

A $C$ integrálási állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ha $t = 0$, akkor $m = m_0$, innen

$$\log|m_0| = C \qquad \Rightarrow \qquad \log|m| = -\alpha\,t + \log|m_0| \qquad \Rightarrow \qquad m = m_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

A $T_0$ felezési idő alatt a kezdeti rádiummennyiségnek épp a fele bomlik el, azaz

$$m(T_0) = m_0 \cdot e^{-\alpha T_0} = \frac{1}{2} m_0,$$

ahonnan az $\alpha$ paraméter meghatározható. Véve az oldalak logaritmusát:

$$-\alpha T_0 = \log\frac{1}{2} = -\log 2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\log 2}{T_0}$$

Ezekután, összesen $T$ idő alatt az el nem bomlott rádium mennyisége:

$$m(T) = m_0 \cdot e^{-\alpha T} = m_0 \cdot e^{-\frac{\log 2}{T_0} T},$$

így az elbomlott mennyiség:

$$m_0 - m(T) = m_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}\log 2}\right),$$

ami a kiindulási $m_0$ mennyiség $\left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}\log 2}\right)$-szerese. A konkrét adatokkal ez $\left(1 - e^{-\frac{200}{1590}\log 2}\right) \approx 0.0835$, azaz kb. 8.35%.

10-5 **Megoldás:** Jelölje $m(t)$ a $t$ időpillanatban jelenlevő, még fel nem oldódott cukor mennyiségét, akkor a feladatkitűzés szerint:

$$m'(t) = -\alpha \cdot m(t)$$

Az $\alpha$ konstans egy egyelőre még ismeretlen pozitív szám: a negatív előjel arra utal, hogy $m(t)$ az idő előrehaladtával csökken, így deriváltja negatív.

A differenciálegyenlet szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{m}\,dm = -\alpha\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \log|m| = -\alpha\,t + C$$

A $C$ integrálási állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ha $t = 0$, akkor $m = 10$, innen

$$\log 10 = C \qquad \Rightarrow \qquad \log|m| = -\alpha\,t + \log 10 \qquad \Rightarrow \qquad m = 10 \cdot e^{-\alpha t}$$

Ha 15 sec alatt 4 g cukor oldódik fel (azaz 6 g marad feloldatlan), akkor $m(15) = 10 \cdot e^{-15\alpha} = 6$, ahonnan $\alpha$ számítható:

$$e^{-15\alpha} = 0.6 \qquad \Rightarrow \qquad -15\alpha = \log 0.6 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -\frac{\log 0.6}{15}$$

Ezekután, további $T$ idő múlva (azaz összesen $(T+15)$ idő alatt) további 4 g cukor oldódik fel (azaz összesen 8 g), így 2 g marad feloldatlan, tehát:

$$m(T+15) = 10 \cdot e^{-\alpha(T+15)} = 2,$$

ahonnan $T$ már meghatározható:

$$e^{-\alpha(T+15)} = 0.2 \qquad \Rightarrow \qquad -\alpha(T+15) = \log 0.2 \qquad \Rightarrow \qquad T + 15 = \frac{\log 0.2}{\frac{\log 0.6}{15}} \qquad \Rightarrow \qquad T \approx 32.26\text{sec}$$

Tehát kb. 32 sec kell még, hogy további 4 g cukor feloldódjék.

10-6 **Megoldás:** A $t$ időpillanatban a tartályban levő folyadékszint legyen $h(t)$; akkor egy kicsiny $\Delta t$ idővel később $h(t+\Delta t)$. Így tehát $\Delta t$ idő alatt $R^2\pi \cdot (h(t) - h(t+\Delta t))$ térfogattal csökkent a tartályban levő folyadékmennyiség. *A tömegmegmaradás törvénye* szerint (a folyadékot összenyomhatatlannak feltételezve) ez épp ugyanennyi a kiömlött folyadék mennyisége, ami közelítőleg egy $r$ sugarú, $\sqrt{2gh(t)} \cdot \Delta t$ magasságú henger térfogatával egyezik. (Itt – mivel $\Delta t$ kicsi – eltekintettünk a tartály folyadékszintjének a $[t, t+\Delta t]$ időintervallumon belül történő megváltozásától.) Azaz:

$$R^2\pi \cdot (h(t) - h(t+\Delta t)) = r^2\pi \cdot \sqrt{2gh(t)} \cdot \Delta t,$$

ahonnan:

$$\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2gh(t)}$$

Véve a $\Delta t \to 0$ határátmenetet, az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$h' = -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$$

A differenciálegyenlet szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\, dh = -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g}\, dt \qquad \Rightarrow \qquad 2\sqrt{h} = -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot t + C$$

A $C$ integrálási állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ha $t = 0$, akkor $h = H$, innen $C = 2\sqrt{H}$, azaz

$$2\sqrt{h} = -\frac{r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot t + 2\sqrt{H}$$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát:

$$\boxed{h(t) = \left(-\frac{r^2}{2R^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot t + \sqrt{H}\right)^2}$$

Bizonyos $T$ idő alatt a tartány kiürül, azaz $h(T) = 0$ lesz. Innen $T$ meghatározható:

$$\boxed{T = \frac{2R^2\sqrt{H}}{r^2\sqrt{2g}} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

*Megjegyzés*: A gyakorlatban a kiömlő folyadéksugár némileg összehúzódik, így a Torricelli-féle kiömlési törvényt úgy korrigáljuk, hogy a kiömlés sebességét $c \cdot \sqrt{2gh}$-nak vesszük, ahol $c$ egy (dimenziótlan, azaz mértékegység nélküli) konstans, mely a kiömlőnyílás kialakításától függ. Értéke 1-nél kisebb: ezt kísérletileg lehet meghatározni.

10-7 **Megoldás:** A Newton-féle hűlési törvényből a folyamatot leíró differenciálegyenlet azonnal adódik:

$$T' = -\kappa(T - T_k),$$

ahol $\kappa > 0$ egy egyelőre ismeretlen konstans; a negatív előjel arra utal, hogy $T(t)$ az idő előrehaladtával csökken, így deriváltja negatív. A kezdeti feltétel nyilván: $T(0) = T_0 = 100°\text{C}$.

A differenciálegyenlet szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{T - T_k}\, dT = -\kappa\, dt \qquad \Rightarrow \qquad \log|T - T_k| = -\kappa\, t + C$$

A $C$ integrálási állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ha $t = 0$, akkor $T = T_0$, innen

$$\log|T_0 - T_k| = C \qquad \Rightarrow \qquad \log|T - T_k| = -\kappa\, t + \log|T_0 - T_k|$$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát:

$$\boxed{T - T_k = (T_0 - T_k) \cdot e^{-\kappa\, t}}$$

1 perc elteltével a hőmérséklet 30 °C-ot esik, azaz 70 °C lesz:

$$70 - 20 = (100 - 20) \cdot e^{-\kappa \cdot 1},$$

innen $\kappa$ meghatározható: $\kappa = -\log\frac{5}{8}$.

Újabb $t_1$ idő után (azaz összesen $(t_1 + 1)$ idő alatt) újabb 30 °C-ot hűl a test, azaz 40 °C-os lesz:

$$40 - 20 = (100 - 20) \cdot e^{-\kappa\,(t_1+1)} \qquad \Rightarrow \qquad 20 = 80 \cdot e^{-\kappa\,(t_1+1)}$$

Innen $t_1$ már számítható:

$$-\kappa \cdot (t_1 + 1) = \log\frac{2}{8} \qquad \Rightarrow \qquad \log\frac{5}{8} \cdot (t_1 + 1) = \log\frac{2}{8} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = -1 + \frac{\log\frac{2}{8}}{\log\frac{5}{8}} \approx 1.94$$

A golyó tehát kb. újabb 2 perc múlva hűl újabb 30 °C-ot.

10-8 **Megoldás:** Egy véletlen találkozás alkalmával annak valószínűsége, hogy egy, a hírt ismerő ember találkozzék olyannal, aki még nem ismeri, $y \cdot (1-y)$. A hír átadásának valószínűsége e szorzattal arányos. Kicsiny $\Delta t$ időtartam esetén feltehető, hogy ilyen hosszúságú időintervallumban lezajlott találkozások száma $\Delta t$-vel arányos. Így, egy rövid $[t, t+\Delta t]$ időintervallum alatt a hírt ismerők számának megnövekedése $y(t) \cdot (1-y(t)) \cdot \Delta t$-vel arányos, azaz:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \alpha \cdot y(t) \cdot (1-y(t)) \cdot \Delta t,$$

ahol $\alpha > 0$ egyelőre ismeretlen konstans. Mindkét oldalt osztva $\Delta t$-vel, és véve a $\Delta t \to 0$ határátmenetet, az

$$y' = \alpha \cdot y \cdot (1-y),$$

szeparábilis differenciálegyenletet nyerjük, melyhez az $y(0) = y_0$ $(= 0.01)$ kezdeti feltétel kapcsolódik.

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y(1-y)}\,dy = \alpha\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \alpha t + C$$

A bal oldalon az integranduszt bontsuk parciális törtek összegére:

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A - Ay + By}{y(1-y)} = \frac{A + (-A+B)y}{y(1-y)}$$

A két oldal azonosan egyenlő, ha $A = 1$ és $A - B = 0$, azaz $A = B = 1$. Kaptuk, hogy:

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

(ami persze azonnal is látható). Az integrálás most már nehézség nélkül elvégezhető:

$$\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \log y - \log(1-y) = \log \frac{y}{1-y} = \alpha t + C$$

(az abszolút érték elhagyható, mert $y$ is, és $(1-y)$ is pozitívak.) A $C$ integrálási állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ha $t=0$, akkor $y=y_0$, azaz $\log\frac{y_0}{1-y_0}=C$, tehát a kezdeti érték feladat $y$ megoldására teljesül, hogy:

$$\log\frac{y}{1-y}=\alpha t+\log\frac{y_0}{1-y_0}$$

A két oldal exponenciálisát véve kapjuk, hogy:

$$\frac{y}{1-y}=\frac{y_0}{1-y_0}\cdot e^{\alpha t}$$

Innen pedig $y$ már kifejezhető:

$$\boxed{y(t)=\frac{\frac{y_0}{1-y_0}e^{\alpha t}}{1+\frac{y_0}{1-y_0}e^{\alpha t}}=\frac{1}{1+\frac{1-y_0}{y_0}e^{-\alpha t}}}$$

A feladatban $y_0=0.01$, innen $y(t)=\frac{1}{1+99e^{-\alpha t}}$. 5 nap múlva pedig $y(5)=\frac{1}{1+99e^{-5\alpha}}=0.1$. Innen $\alpha$ számítható:

$$1+99e^{-5\alpha}=10 \qquad\Rightarrow\qquad e^{-5\alpha}=\frac{9}{99}=\frac{1}{11} \qquad\Rightarrow\qquad -5\alpha=\log\frac{1}{11}=-\log 11 \qquad\Rightarrow\qquad \alpha=\frac{\log 11}{5}$$

Összesen $T$ idő elteltével pedig $y(5)=\frac{T}{1+99e^{-\alpha T}}=0.5$, ahonnan most már $T$ számítható:

$$1+99e^{-\alpha T}=2 \qquad\Rightarrow\qquad e^{-\alpha T}=\frac{1}{99} \qquad\Rightarrow\qquad -\alpha T=\log\frac{1}{99}=-\log 99 \qquad\Rightarrow\qquad T=\frac{\log 99}{\log 11}\cdot 5\approx 9.5816$$

Tehát $10$ napon belül a (rém)hírt már a közösség fele ismeri, azaz – legalábbis kezdetben – egyre gyorsabban terjed; később a növekedés sebessége csökken, és a megoldás $1$-hez tart („telítődés”).

*Megjegyzés*: Hasonló elven modellezhető – egyebek közt – a járványterjedés, valamint egy új termék elterjedése a piacon. A fenti folyamatot még „szociális diffúziónak” vagy „logisztikus növekedésnek” is szokták nevezni (alkalmazástól függően).

10-9 **Megoldás:** A differenciálegyenletet $y'$-ra rendezzük:

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

ahonnan látható, hogy a differenciálegyenlet *szeparábilis* és ugyanakkor *változóiban homogén* is. Oldjuk meg mindkét tulajdonság alapján.

*1.megoldás*: A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y^2}\,dy = \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$$

ahonnan $y$ nyomban kifejezhető:

$$\boxed{y = \frac{1}{\frac{1}{x} - C}}$$

Megjegyezzük, hogy a $C$ konstans nem lehet tetszőleges, ha megköveteljük, hogy $y$ a teljes $(0, +\infty)$ intervallumon legyen értelmezve. Ha $C > 0$, akkor a nevező zérussá válik egy helyen (éspedig az $x = \frac{1}{C}$ helyen). $C \leq 0$ esetén ez nem fordul elő. Így a fenti formulában fel kell tennünk, hogy $C \leq 0$.

*2.megoldás*: Vezessük be az $u := \frac{y}{x}$ új függvényt, akkor $y = x \cdot u$. Deriválva:

$$y' = u + x \cdot u' = \frac{y^2}{x^2} = u^2$$

azaz $u$ kielégíti a

$$u' = \frac{u^2 - u}{x}$$

szeparábilis differenciálegyenletet. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{u(u-1)}\,du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{u(u-1)}\,du = \log|x| + C$$

A bal oldalon az integrandusz parciális törtek összegére bontható:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} = \frac{Au - A + Bu}{u(u-1)} = \frac{(A+B)u - A}{u(u-1)}$$

A bal és a jobb oldal azonosan egyenlő, ha $A + B = 0$, és $A = -1$, azaz, ha $A = -1$, és $B = 1$. Kaptuk, hogy

$$\frac{1}{u(u-1)} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1}$$

(ami persze rögtön látható is). A bal oldalon az integrálás már elvégezhető, és kapjuk, hogy:

$$-\log|u| + \log|u-1| = \log|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{u-1}{u}\right| = e^C \cdot |x|$$

Innen két megoldást is kapunk, de ezek egyesíthetők egyetlen formulába:

$$\frac{u-1}{u} = \pm e^C \cdot x =: c \cdot x$$

Itt $e^C$ csak pozitív lehet, de a $c$ konstans már tetszőleges valós értéket felvehet, beleértve a 0-t is (ekkor az $u \equiv 1$ megoldást kapjuk, amit elvesztettünk az $(u-1)$-gyel való osztáskor). Ebből az egyenlőségből $u$ már könnyedén kifejezhető:

$$u = \frac{1}{1 - cx}$$

ahonnan végül $y$-ra az alábbi formulát nyerjük:

$$y = x \cdot u = \frac{x}{1 - cx} = \frac{1}{\frac{1}{x} - c}$$

Mint az előző megoldásban, most is megjegyzendő, hogy a $c$ konstansra $c \leq 0$ kell, hogy teljesüljön, ellenkező esetben a nevező 0-vá válik (és így a formula értelmetlen lesz) az $x = \frac{1}{c}$ helyen, márpedig a feladat a teljes $(0, +\infty)$ intervallumon értelmezett megoldások megkeresésére vonatkozik.

10-10 **Megoldás:** A differenciálegyenletet $y'$-ra rendezve:

$$y' = \frac{x^2y + xy^2}{x^3} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2},$$

tehát a differenciálegyenlet változóiban homogén. Vezessünk be új ismeretlen függvényt az $u := \frac{y}{x}$ definícióval. Akkor

$$y = x \cdot u \qquad \Rightarrow \qquad y' = u + x \cdot u' = u + u^2 \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{u^2}{x}$$

Ez már szeparábilis egyenlet. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{u} = \log x + C \qquad \Rightarrow \qquad u = -\frac{1}{\log x + C}$$

Következésképp

$$\boxed{y = -\frac{x}{\log x + C}}$$

Megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását. (A formula nem feltétlen értelmes *minden* $x \geq 1$-re: ha $\log x = -C$, akkor a nevező 0 (tehát az $x = e^{-C}$ helyen). Így, ha $C$ pozitív, akkor minden $x \geq 1$-re $\log x + C > 0$, de ha $C$ negatív, akkor a fenti függvény csak az $[1,e^{-C})$ intervallumon értelmes.)

A $C$ integrálási konstans a kezdeti feltételből számítható:

$$y(1) = -\frac{1}{\log 1 + C} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad C = 2$$

tehát az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$\boxed{y = -\frac{x}{\log x + 2}}$$

10-11 **Megoldás:** A differenciálegyenlet szeparábilis: a változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \log|y| = 2\log|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm e^C x^2$$

A két formula egyesíthető: ha $C$ befutja a valós számokat, akkor $e^C$ befutja a pozitív számokat, $-e^C$ pedig a negatív számokat. Így az általános megoldás

$$\boxed{y = c \cdot x^2}$$

alakba írható, ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. (Ezt a megoldást elveszítettük az $y$-nal való osztáskor.)

Egy másik megoldási módszer, ha a differenciálegyenletet

$$y' - \frac{2}{x} \cdot y = 0$$

alakba írjuk, és alkalmazzuk az *integráló tényezők módszerét*. $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $\int \left(-\frac{2}{x}\right)\,dx = -2\log x$. Ennek exponenciálisa $\frac{1}{x^2}$ . Ezzel, mint integráló tényezővel szorozva mindkét oldalt:

$$\frac{1}{x^2} \cdot y' - \frac{2}{x^3} \cdot y = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y\right)' = 0$$

Ezért

$$\frac{1}{x^2} \cdot y = c = \text{konst.} \qquad \Rightarrow \qquad y = c \cdot x^2$$

**10-12 Megoldás:**

*Megoldás az integráló tényezők módszerével*: $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $-\frac{x^2}{2}$. Ennek exponenciálisával, mint integráló tényezővel szorozzuk mindkét oldalt:

$$e^{-x^2/2}y' - xe^{-x^2/2}y = xe^{-x^2/2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(e^{-x^2/2}y\right)' = xe^{-x^2/2} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-x^2/2}y = \int xe^{-x^2/2}\,dx$$

A jobb oldali integrandusz $g'(x) \cdot f(g(x))$ alakúra hozható:

$$\int xe^{-x^2/2}\,dx = -\int (-x)e^{-x^2/2}\,dx = -e^{-x^2/2} + C$$

Innen

$$\boxed{e^{-x^2/2}y = -e^{-x^2/2} + C \qquad \Rightarrow \qquad y = -1 + Ce^{x^2/2}}$$

*Megoldás az állandók variálásának módszerével*: A megfelelő homogén egyenlet: $y_H' - xy_H = 0$, ami szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y_H}\,dy = x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \log|y_H| = \frac{x^2}{2} + C \qquad \Rightarrow \qquad y_H = \pm e^C \cdot e^{x^2/2} = c \cdot e^{x^2/2},$$

ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstans már tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. Ezekután az eredeti (inhomogén) egyenlet megoldását *keressük* $y := c(x) \cdot e^{x^2/2}$ alakban, ahol most $c$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y' = c' \cdot e^{x^2/2} + c \cdot x \cdot e^{x^2/2} \qquad \Rightarrow \qquad y' - xy = c' \cdot e^{x^2/2} + c \cdot x \cdot e^{x^2/2} - c \cdot x \cdot e^{x^2/2} = c' \cdot e^{x^2/2} = x$$

Innen

$$c' = x \cdot e^{-x^2/2} \qquad \Rightarrow \qquad c = \int x \cdot e^{-x^2/2}\,dx = -\int (-x) \cdot e^{-x^2/2}\,dx = -e^{-x^2/2} + C$$

Visszahelyettesítve:

$$\boxed{y = c \cdot e^{x^2/2} = -1 + Ce^{x^2/2}}$$

egyezésben az előző megoldással.

10-13 **Megoldás:**

Mindenekelőtt rendezzük a differenciálegyenletet a következő alakúra:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = -e^x$$

*Megoldás az integráló tényezők módszerével*: $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $\log x$. Ennek exponenciálisával (azaz $x$-szel), mint integráló tényezővel szorozzuk mindkét oldalt:

$$x \cdot y' + y = (x \cdot y)' = -x \cdot e^x \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot y = -\int x \cdot e^x \, dx$$

A jobb oldalon alkalmazzunk parciális integrálást az alábbi szereposztással:

$$u := x, \quad v' := e^x \qquad \Rightarrow \qquad u = 1, \quad v = e^x$$

Innen

$$x \cdot y = -\int x \cdot e^x \, dx = -xe^x + \int 1 \cdot e^x \, dx = -xe^x + e^x + C,$$

ahonnan végül tetszőleges $C \in \mathbf{R}$ mellett:

$$\boxed{y = \frac{(1-x) \cdot e^x + C}{x}}$$

*Megoldás az állandók variálásának módszerével*: A megfelelő homogén egyenlet: $y_H' + \frac{1}{x} \cdot y_H = 0$, ami szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y_H} \, dy = -\frac{1}{x} \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \log |y_H| = -\log |x| + C \qquad \Rightarrow \qquad y_H = \pm e^C \cdot \frac{1}{x} = \frac{c}{x},$$

ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstans már tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. Ezekután az eredeti (inhomogén) egyenlet megoldását *keressük* $y := \frac{c(x)}{x}$ alakban, ahol most $c$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot c + \frac{1}{x} \cdot c' \qquad \Rightarrow \qquad y' + \frac{1}{x} \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot c + \frac{1}{x} \cdot c' + \frac{1}{x^2} \cdot c = \frac{c'}{x} = -e^x$$

Innen

$$c' = -x \cdot e^x \qquad \Rightarrow \qquad c = -\int x \cdot e^x \, dx$$

Az integrált parciális integrálással kiszámítva (mint az előző megoldásban) kapjuk, hogy $c = -xe^x + e^x + C$. Visszahelyettesítve:

$$\boxed{y = \frac{(1-x) \cdot e^x + C}{x}}$$

egyezésben az előző megoldással.

**10-14 Megoldás:**

Mindenekelőtt rendezzük a differenciálegyenletet a következő alakúra:

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{1}{x^2+1}$$

*Megoldás az integráló tényezők módszerével*: $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $2\log x$. Ennek exponenciálisával (azaz $x^2$-tel), mint integráló tényezővel szorozzuk mindkét oldalt:

$$x^2 \cdot y' + 2xy = (x^2 \cdot y)' = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 \cdot y = \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

A jobb oldalon a számlálóba becsempészve egy 1-et és egy $-1$-et, az integrál két alapintegrál különbségére bomlik:

$$x^2 \cdot y = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

ahonnan végül tetszőleges $C \in \mathbf{R}$ mellett:

$$\boxed{y = \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} + \frac{C}{x^2}}$$

*Megoldás az állandók variálásának módszerével*: A megfelelő homogén egyenlet: $y_H' + \frac{2}{x} \cdot y_H = 0$, ami szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y_H}\, dy = -\frac{2}{x}\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \log|y_H| = -2\log|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad y_H = \pm e^C \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{c}{x^2},$$

ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstans már tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. Ezekután az eredeti (inhomogén) egyenlet megoldását *keressük* $y := \frac{c(x)}{x^2}$ alakban, ahol most $c$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y' = -\frac{2}{x^3} \cdot c + \frac{1}{x^2} \cdot c' \qquad \Rightarrow \qquad y' + \frac{2}{x} \cdot y = -\frac{2}{x^3} \cdot c + \frac{1}{x^2} \cdot c' + \frac{2}{x^3} \cdot c = \frac{c'}{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

Innen

$$c' = \frac{x^2}{x^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad c = \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

Az integrált ugyanúgy végezve el, mint az előző megoldásban, kapjuk, hogy $c = x - \operatorname{arctg} x + C$. Visszahelyettesítve:

$$\boxed{y = \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} + \frac{C}{x^2}}$$

egyezésben az előző megoldással.

10-15 **Megoldás:**

*Megoldás az integráló tényezők módszerével*: $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $-x^3$. Ennek exponenciálisával, mint integráló tényezővel szorozzuk mindkét oldalt:

$$y'e^{-x^3} - 3x^2ye^{-x^3} = \left(e^{-x^3}y\right)' = 6x^2e^{-x^3} \qquad \Rightarrow$$

$$e^{-x^3}y = \int 6x^2e^{-x^3}\,dx = (-2)\cdot\int(-3x^2)e^{-x^3}\,dx = -2e^{-x^3} + C$$

ahonnan tetszőleges $C \in \mathbf{R}$ mellett:

$$\boxed{y = -2 + Ce^{x^3}}$$

*Megoldás az állandók variálásának módszerével*: A megfelelő homogén egyenlet: $y_H' - 3x^2y_H = 0$, ami szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y_H}\,dy = 3x^2\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \log|y_H| = x^3 + C$$

$$\Rightarrow \qquad y_H = \pm e^C\cdot e^{x^3} = c\cdot e^{x^3},$$

ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstans már tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. Ezekután az eredeti (inhomogén) egyenlet megoldását *keressük* $y := c(x)e^{x^3}$ alakban, ahol most $c$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y' = c'e^{x^3} + 3x^2ce^{x^3} \qquad \Rightarrow \qquad y' - 3x^2y = c'e^{x^3} + 3x^2ce^{x^3} - 3x^2ce^{x^3} = c'e^{x^3} = 6x^2$$

Innen

$$c' = 6x^2e^{-x^3} \qquad \Rightarrow \qquad c = \int 6x^2e^{-x^3}\,dx = (-2)\cdot\int(-3x^2)e^{-x^3}\,dx = -2e^{-x^3} + C$$

Visszahelyettesítve:

$$\boxed{y = -2 + Ce^{x^3}}$$

egyezésben az előző megoldással.

10-16 **Megoldás:**

*Megoldás az integráló tényezők módszerével*: $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $-2\log x$. Ennek exponenciálisával (azaz $\frac{1}{x^2}$-tel), mint integráló tényezővel szorozzuk mindkét oldalt:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \left(\frac{1}{x^2}y\right)' = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x^2}y = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C$$

($x > 1$ miatt az abszolút érték jel el is hagyható.) A $C$ integrálási konstanst a kezdeti feltételből határozzuk meg. Ha $x = 1$, akkor $y = 3$, innen $3 = \log 1 + C = C$. Kaptuk, hogy

$$\frac{1}{x^2}y = \log x + 3$$

ahonnak a kezdeti érték feladat megoldása:

$$\boxed{y = x^2 \log x + 3x^2}$$

*Megoldás az állandók variálásának módszerével*: A megfelelő homogén egyenlet: $y_H' - \frac{2}{x}y_H = 0$, ami szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y_H}\,dy = \frac{2}{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \log|y_H| = 2\log|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad y_H = \pm e^C \cdot x^2 = c \cdot x^2,$$

ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstans már tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. Ezekután az eredeti (inhomogén) egyenlet megoldását *keressük* $y := c(x)x^2$ alakban, ahol most $c$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y' = c'x^2 + 2cx \qquad \Rightarrow \qquad y' - \frac{2}{y} = c'x^2 + 2cx - 2cx = c'x^2 = x$$

Innen

$$c' = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad c = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C$$

Visszahelyettesítve:

$$y = x^2 \log x + Cx^2$$

A $C$ integrálási konstanst a kezdeti feltételből határozzuk meg. Ha $x = 1$, akkor $y = 3$, innen $3 = \log 1 + C = C$. Kaptuk, hogy

$$\boxed{y = x^2 \log x + 3x^2}$$

egyezésben az előző megoldással.

**10-17 Megoldás:**

*Megoldás az integráló tényezők módszerével*: $y$ együtthatójának egy primitív függvénye: $-\frac{1}{2}\log(x^2+4)$ (ellenőrizzük!). Ennek exponenciálisával (azaz $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$-tel), mint integráló tényezővel szorozzuk mindkét oldalt:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot y' - \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}} \cdot y = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot y\right)' = \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot y = \int \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = 6 \cdot \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\,dx = 6 \cdot \int (\sqrt{x^2+4})'\,dx = 6 \cdot \sqrt{x^2+4} + C$$

A $C$ integrálási konstanst a kezdeti feltételből határozzuk meg. Ha $x = 0$, akkor $y = 4$, innen $\frac{4}{2} = 6 \cdot 2 + C$, azaz $C = -10$. Innen a kezdeti érték feladat megoldása:

$$\boxed{y = 6 \cdot (x^2+4) - 10 \cdot \sqrt{x^2+4}}$$

*Megoldás az állandók variálásának módszerével*: A megfelelő homogén egyenlet: $y_H' - \frac{x}{x^2+4} \cdot y_H = 0$, ami szeparábilis. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{1}{y_H}\,dy = \frac{x}{x^2+4}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \log|y_H| = \frac{1}{2} \cdot \log(x^2+4) + C \qquad \Rightarrow \qquad y_H = \pm e^C \cdot \sqrt{x^2+4} = c \cdot \sqrt{x^2+4}$$

ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstans már tetszőleges lehet, *beleértve a 0-t is*. Ezekután az eredeti (inhomogén) egyenlet megoldását *keressük* $y := c(x)\sqrt{x^2+4}$ alakban, ahol most $c$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y' = c'\sqrt{x^2+4} + c \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} \qquad \Rightarrow$$

$$y' - \frac{x}{x^2+4} \cdot y = c'\sqrt{x^2+4} + c \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{x}{x^2+4} \cdot c \cdot \sqrt{x^2+4} = 6x$$

Innen

$$c' = \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}} \qquad \Rightarrow \qquad c = \int \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

Az integrál kiszámítása ugyanúgy történik, mint az előző megoldásban: kapjuk, hogy $c = 6 \cdot \sqrt{x^2+4} + C$
Visszahelyettesítve:

$$y = 6 \cdot (x^2+4) + C \cdot \sqrt{x^2+4}$$

A $C$ integrálási konstanst a kezdeti feltételből határozzuk meg. Ha $x = 0$, akkor $y = 4$, innen $4 = 6 \cdot 4 + C \cdot 2$, ahonnan $C = -10$. Kaptuk, hogy a kezdeti érték feladat megoldása:

$$\boxed{y = 6 \cdot (x^2+4) - 10 \cdot \sqrt{x^2+4}}$$

egyezésben az előző megoldással.

10-18 **Megoldás:**

Newton 2. törvénye szerint a testre ható erők eredője megegyezik a test tömegének és gyorsulásának szorzatával. Ez utóbbi definíció szerint az elmozdulás második deriváltja, azaz $x''(t)$. A testre pedig két erő hat: a nehézségi erő ($m \cdot g$) és a vele ellentétes irányú rugóerő ($-D \cdot x(t)$). Következésképp minden $t$ időpillanatban:

$$mx''(t) = mg - Dx(t)$$

azaz

$$x''(t) = g - \frac{D}{m} \cdot x(t) = g - \omega^2 \cdot x(t)$$

ahol $g$ jelöli a nehézségi gyorsulást ($g \approx 9.81\mathrm{m/sec}^2$), és $\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$.

A fenti differenciálegyenlet másodrendű, állandó együtthatós. Egyszerűsíthetünk az egyenleten, ha bevezetjük az $x_0 := \frac{mg}{D} = \frac{g}{\omega^2}$ távolságot (ez épp azzal a nyugalmi elmozdulással egyezik, mikor a test saját súlya egyensúlyt tart a rugóerővel), és $x$-et $x(t) := x_0 + u(t)$ alakban keressük, ahol $u$ most már *a nyugalmi helyzethez képesti elmozdulást* jelenti. Miután nyilván $x''(t) = u''(t)$ (konstans függvény deriváltja azonosan 0), az új $u$ függvény eleget tesz az alábbi differenciálegyenletnek:

$$u'' = g - \omega^2 \cdot (x_0 + u) = g - \omega^2 \cdot \frac{g}{\omega^2} - \omega^2 u$$

azaz

$$u'' = -\omega^2 u$$

A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, melynek két konjugált komplex (és tiszta képzetes) gyöke van: $\lambda = \omega \cdot i$ és $\lambda = -\omega \cdot i$. Az egyenlet általános megoldása tehát (amiből az $x$-re vontakozó differenciálegyenlet általános megoldása is nyomban adódik):

$$\boxed{u = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad \Rightarrow \qquad x = x_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}$$

10-19 **Megoldás:** A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda = 4$ és $\lambda = 1$. Két különböző valós gyök van: a megoldások tehát exponenciális függvényekből fognak összeállni. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{4x} + C_2 e^x$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := A \sin 3x + B \cos 3x$$

alakban, akkor a deriváltak:

$$y_P' = -3B \sin 3x + 3A \cos 3x \qquad y_P'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' - 5y_P' + 4y_P = (-9A + 15B + 4A) \sin 3x + (-9B - 15A + 4B) \cos 3x = (-5A + 15B) \sin 3x + (-5B - 15A) \cos 3x$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $\cos 3x$-szel), ha $-5A + 15B = 0$, és $-5B - 15A = 1$. Az első egyenletből: $A = 3B$, ezt a másodikba helyettesítve: $-5B - 45B = 1$, ahonnan: $B = -\frac{1}{50}$, és $A = -\frac{3}{50}$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x - \frac{3}{50} \sin 3x - \frac{1}{50} \cos 3x}$$

10-20 **Megoldás:** A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda = 4$ és $\lambda = 1$. Két különböző valós gyök van: a megoldások tehát exponenciális függvényekből fognak összeállni. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{4x} + C_2 e^x$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := A + Bx + Cx^2$$

alakban, akkor a deriváltak:

$$y_P' = B + 2Cx \qquad\qquad y_P'' = 2C$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' - 5y_P' + 4y_P = (2C - 5B + 4A) + (-10C + 4B)x + 4Cx^2$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $(1 - 4x^2)$-tel), ha $2C - 5B + 4A = 1$, $-10C + 4B = 0$, és $4C = -4$.

A harmadik egyenletből: $C = -1$, ezt a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy $B = -\frac{5}{2}$, ezeket pedig az elsőbe visszahelyettesítve, $A$ is meghatározható: $A = -\frac{19}{8}$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x - \frac{19}{8} - \frac{5}{2}x - x^2}$$

10-21 **Megoldás:** A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda = 3$ és $\lambda = -4$. Két különböző valós gyök van: a megoldások tehát exponenciális függvényekből fognak összeállni. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := A \sin 2x + B \cos 2x$$

alakban, akkor a deriváltak:

$$y_P' = -2B \sin 2x + 2A \cos 2x \qquad\qquad y_P'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' - 12y_P = (-4A - 2B - 12A) \sin 2x + (-4B + 2A - 12B) \cos 2x = (-16A - 2B) \sin 2x + (2A - 16B) \cos 2x$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $2 \sin 2x$-szel), ha $-16A - 2B = 2$, és $2A - 16B = 0$. A második egyenletből: $A = 8B$, ezt az elsőbe helyettesítve: $-128B - 2B = 2$, ahonnan: $B = -\frac{2}{130}$, és $A = -\frac{16}{130}$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} - \frac{16}{130} \sin 2x - \frac{2}{130} \cos 2x}$$

10-22 **Megoldás:** A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda = 3$ és $\lambda = -4$. Két különböző valós gyök van: a megoldások tehát exponenciális függvényekből fognak összeállni. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := (A + Bx)e^{2x}$$

alakban, akkor a deriváltak:

$$y_P' = Be^{2x} + (2A + 2Bx)e^{2x} = (2A + B + 2Bx)e^{2x}, \qquad y_P'' = 2Be^{2x} + (4A + 2B + 4Bx)e^{2x} = (4A + 4B + 4Bx)e^{2x}$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' - 12y_P = (4A + 4B + 2A + B - 12A + 4Bx + 2Bx - 12Bx)e^{2x} = (-6A + 5B - 6Bx)e^{2x}$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $x \cdot e^{2x}$-szel), ha $-6A + 5B = 0$, és $-6B = 1$. A második egyenletből: $B = -\frac{1}{6}$, ezt az elsőbe helyettesítve: $A = -\frac{5}{36}$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} + \left(-\frac{5}{36} - \frac{1}{6}x\right) e^{2x}}$$

10-23 **Megoldás:** A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda = 3$ és $\lambda = -4$. Két különböző valós gyök van: a megoldások tehát exponenciális függvényekből fognak összeállni. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := x(A + Bx)e^{3x} = (Ax + Bx^2)e^{3x}$$

alakban, ugyanis *a differenciálegyenlet jobb olodalán álló exponenciális függvényben $x$ együtthatója, 3, egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek*.

A fenti függvényt visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe, hosszabb számolás után kapjuk, hogy:

$$y_P'' + y_P' - 12y_P = (7A + 2B + 14Bx)e^{3x}$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $x \cdot e^{3x}$-szel), ha $7A + 2B = 0$, és $14B = 1$. A második egyenletből: $B = \frac{1}{14}$, ezt az elsőbe helyettesítve: $A = -\frac{1}{49}$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} + \left(-\frac{1}{49}x + \frac{1}{14}x^2\right) e^{3x}}$$

10-24 **Megoldás:** A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda = i$ és $\lambda = -i$. Két konjugált komplex gyök van: a megoldások tehát trigonometrikus függvényekből fognak összeállni. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ahol $C_1$,$C_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := x(A\cos x + B\sin x) = Ax\cos x + Bx\sin x$$

alakban, ugyanis *a differenciálegyenlet jobb olodalán álló trigonometrikus függvényben $x$ együtthatójának, 1-nek, az $i$-szerese egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek*.

A fenti függvényt visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe, hosszabb számolás után kapjuk, hogy:

$$y_P'' + y_P = -2A\sin x + 2B\cos x$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $2\cos x + 3\sin x$-szel), ha $-2A = 3$, és $2B = 2$, azaz $A = -\frac{3}{2}$, $B = 1$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$\boxed{y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cdot\left(-\frac{3}{2}\cos x + \sin x\right)}$$

10-25 **Megoldás:**

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Ennek gyökei megegyeznek: $\lambda = 3$ (kétszeres gyök). A megoldások tehát exponenciális függvényből és elsőfokú polinomból fognak összeállni. Az általános megoldás:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

A $C_1$, $C_2$ konstansokat a kezdeti feltételből számítjuk. $y$-t deriválva:

$$y' = C_2 e^{3x} + (3C_1 + 3C_2 x)e^{3x} = (3C_1 + C_2 + 3C_2 x)e^{3x}$$

Innen

$$y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 = C_1 = 2, \qquad y'(0) = (3C_1 + C_2 + 3C_2 \cdot 0) \cdot 1 = 3C_1 + C_2 = 3$$

$C_1$, $C_2$ tehát kielégíti a $C_1 = 2$, $3C_1 + C_2 = 3$ egyenletrendszert, ahonnan nyilván $C_1 = 2$, és $C_2 = -3$. A kezdeti érték feladat megoldása tehát:

$$\boxed{y = (2 - 3x)e^{3x}}$$

**10-26 Megoldás:**

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Két konjugált komplex gyök van: $\lambda = 2 + 3i$, és $\lambda = 2 - 3i$. A megoldások tehát exponenciális és trigonometrikus függvényekből fognak összeállni. Az általános megoldás:

$$y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^{2x}$$

A $C_1$, $C_2$ konstansokat a kezdeti feltételből számítjuk. $y$-t deriválva:

$$y' = (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)e^{2x} + (2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x)e^{2x} = ((2C_1 + 3C_2)\cos 3x + (-3C_1 + 2C_2)\sin 3x)e^{2x}$$

Innen

$$y(0) = (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 = C_1 = 1, \qquad y'(0) = ((2C_1 + 3C_2) \cdot 1 + (-3C_1 + 2C_2) \cdot 0) \cdot 1 = 2C_1 + 3C_2 = 8$$

$C_1$, $C_2$ tehát kielégíti a $C_1 = 1$, $2C_1 + 3C_2 = 8$ egyenletrendszert, ahonnan nyilván $C_1 = 1$, és $C_2 = 2$. A kezdeti érték feladat megoldása tehát:

$$\boxed{y = (\cos 3x + 2 \sin 3x)e^{2x}}$$

10-27 **Megoldás:**

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

melynek gyökei: $\lambda = 0$, és $\lambda = -1$. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_P := A \sin x + B \cos x$$

alakban, akkor a deriváltak:

$$y_P' = -B \sin x + A \cos x \qquad\qquad y_P'' = -A \sin x - B \cos x$$

Visszehelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y_P'' + y_P' = (-A - B) \sin x + (A - B) \cos x$$

A jobb oldal azonosan egyenlő a differenciálegyenlet jobb oldalával (azaz $\sin x$-szel), ha $-A - B = 1$, és $A - B = 0$, azaz, ha $A = B = -\frac{1}{2}$.

Ezekután a differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

A $C_1$, $C_2$ konstansokat a kezdeti feltételből számíthatjuk. A megoldás deriváltja:

$$y' = -C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x$$

Innen

$$y(0) = C_1 + C_2 \cdot 1 - 0 + \frac{1}{2} = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 1, \qquad y'(0) = -C_2 \cdot 1 - \frac{1}{2} + 0 = -C_2 - \frac{1}{2} = -1$$

$C_1$, $C_2$ tehát kielégíti a $C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 1$, $-C_2 - \frac{1}{2} = -1$ egyenletrendszert, ahonnan $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_1 = 1$. A kezdeti érték feladat megoldása tehát:

$$\boxed{y = 1 + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x}$$

10-28 **Megoldás:**

A differenciálegyenlet alakja most:

$$y' = f(x,y) = x,$$

és a kezdeti érték feladat pontos megoldása nyilván $y(x) = \frac{1}{2}x^2$. Az Euler-módszer által adott közelítést az alábbi rekurzió definiálja:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n,y_n)$$

A konkrét feladatban $f(x,y) = x$, így a rekurzió most $y_{n+1} = y_n + hx_n$, alakú, azaz $x_n = nh$ miatt

$$y_{n+1} = y_n + h^2 n$$

Ugyanezzel az egyenlőséggel $y_n$ is kifejezhető $x_{n-1}$ segítségével, és a többi, alacsonyabb indexű $y_k$ is:

$$y_{n+1} = y_n + h^2 n = y_{n-1} + h^2(n-1) + h^2 n = y_{n-2} + h^2(n-2) + h^2(n-1) + h^2 n = ...,$$

ahonnan végül azt kapjuk, hogy:

$$y_{n+1} = y_0 + h^2(0 + 1 + 2 + ... + n) = h^2 \frac{n(n+1)}{2},$$

ahol felhasználtuk az első $n$ természetes szám összegére vonatkozó formulát (ld. a 2-5 példát). Innen speciálisan az $n$ indexre:

$$y_n = h^2 \frac{(n-1)n}{2} = \frac{h^2 n^2}{2} - h \cdot \frac{hn}{2}$$

Mivel pedig $hn = x_n$, azért innen:

$$y_n = \frac{x_n^2}{2} - h \cdot \frac{x_n}{2} = y(x_n) - h \cdot \frac{x_n}{2}$$

Ezt átrendezve, és abszolút értéket véve kapjuk, hogy:

$$|y_n - y(x_n)| = h \cdot \frac{|x_n|}{2} \leq \frac{h}{2}$$

hiszen $|x_n| \leq 1$. A bizonyítás ezzel kész.

## 11. Ajánlott irodalom

[1] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano: Thomas-féle Kalkulus 1., 2. Typotex, Budapest, 2006.

[2] Komornik V.: Valós analízis előadások I., II. Typotex, Budapest, 2003.

[3] W. E. Boyce, R. C. DiPrima: Elementary Differential Equations. Wiley, 1992.