# Felületek

# Felületek megadása

**Sík** egyenlete: $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=0$.

**Felület** nemparaméteres egyenlete: az $f(\mathbf{x})=0$ egyenletet kielégítő $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3$ pontok halmaza, ahol $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ adott folytonos függvény.

**Felület** paraméteres vektoregyenlete: egy adott $\mathbf{x}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ folytonos függvény értékkészlete. Maga a függvény: a felület egy *reprezentánsa* vagy *paraméterezése*.

*Példa* (sík paraméteres vektoregyenlete): $\mathbf{x}(u,v):=\mathbf{a}+u\mathbf{e}+v\mathbf{f}$ , ahol **f** és **g** egymással nem párhuzamos, **n**-re merőleges vektorok.

*Példa* (origó középpontú gömb): Nemparaméteres egyenlet:

$$\boxed{f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0}$$

Paraméteres egyenlet: jelölje $(x, y, z)$ a gömbfelület egy pontját, $\theta$ a pont helyvektora és az *xy*-sík szögét (földrajzi szélesség), $\varphi$ pedig az $(x, y, 0)$ vetületi pont helyvektorának szögét és az *x*-tengely pozitív felével (földrajzi hosszúság). Akkor

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = R\cos\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + R\cos\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{j} + R\sin\theta\cdot\mathbf{k}\text{, azaz}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\theta,\varphi) &= R\cos\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) &= R\cos\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) &= R\sin\theta \end{aligned}}$$

A paramétertartomány: $(\theta,\varphi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi)$.

*Példa* (forgásparaboloid): Nemparaméteres egyenlet:

$$\boxed{f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z = 0} \quad \text{(hagyományosan: } z = x^2 + y^2\text{)}$$

Paraméterezése: $x := u, \quad y := v, \quad z = u^2 + v^2$, innen

$$\mathbf{x}(u,v) := u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + (u^2 + v^2) \cdot \mathbf{k}$$

A paramétertartomány: $(u,v) \in \mathbf{R}^2$.

Általában, ha a felület egy $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ folytonos függvény grafikonja, akkor nemparaméteres egyenlete: $f(x,y,z) := z - g(x,y) = 0$, a természetes paraméterezés pedig: $x := u, \quad y := v, \quad z = g(u,v)$, innen

$$\boxed{\mathbf{x}(u,v) := u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + g(u,v) \cdot \mathbf{k}}$$

# Felületek paramétervonalai

Ha $(u,v) \to \mathbf{x}(u,v)$ egy felület paraméterezése, akkor $v$ (ill. $u$) értékét egy $v_0$ (ill. $u_0$) értékre lerögítve két db egyparaméteres görbesereget nyerünk (**paramétervonalak**): $u \to \mathbf{x}(u,v_0)$, és $v \to \mathbf{x}(u_0,v)$.

*Példa* (gömb): a $\theta_0$ szöghöz tartozó szélességi kör egyenlete:

$$\mathbf{x}(\varphi) = R\cos\theta_0 \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + R\cos\theta_0 \sin\varphi \cdot \mathbf{j} + R\sin\theta_0 \cdot \mathbf{k}.$$

A $\varphi_0$ szöghöz tartozó hosszúsági kör egyenlete:

$$\mathbf{x}(\theta) = R\cos\theta \cos\varphi_0 \cdot \mathbf{i} + R\cos\theta \sin\varphi_0 \cdot \mathbf{j} + R\sin\theta \cdot \mathbf{k}$$

# Görbesereg alkotta felület

Legyen $t \to \gamma_v(t)$ egy egyparaméteres görbesereg: $\gamma_v : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ ($v \in [c,d]$). Akkor az

$$\boxed{\mathbf{x}(u,v) := \gamma_v(u)}$$

leképezés egy felületet definiál ($\mathbf{x} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}^3$).

*Példa*:

$\mathbf{x}(t) := (t, v, t^2)$ (parabolasereg), $\mathbf{x}(u,v) := (u, v, u^2)$ (parabolafelület)

*Speciális eset* (két görbe közti felület): $\mathbf{x}(t) \to \gamma_0(t)$, $\mathbf{x}(t) \to \gamma_1(t)$ két görbe (**vezérgörbék**), akkor: $\boxed{\mathbf{x}(u,v) \to (1-v)\gamma_0(u) + v\gamma_1(u)}$.

*Példa* (csonkakúp-palást):

$$\gamma_0(t) := R\cos t\cdot\mathbf{i} + R\sin t\cdot\mathbf{j},\quad \gamma_1(t) := r\cos t\cdot\mathbf{i} + r\sin t\cdot\mathbf{j} + m\cdot\mathbf{k}$$

Ekkor:

$$\mathbf{x}(u,v) = (1-v)\cdot(R\cos u\cdot\mathbf{i} + R\sin u\cdot\mathbf{j}) + v\cdot(r\cos u\cdot\mathbf{i} + r\sin u\cdot\mathbf{j} + m\cdot\mathbf{k})$$

azaz

$$\boxed{\begin{aligned} x(u,v) &= ((1-v)\cdot R + v\cdot r)\cos u \\ y(u,v) &= ((1-v)\cdot R + v\cdot r)\sin u \\ z(u,v) &= v\cdot m \end{aligned}}$$

# Felületek metszésvonala

Ha a felületek nemparaméteres egyenletei:

$$f(x, y, z) = 0 \text{ és } g(x, y, z) = 0,$$

akkor innen néha $x$ és $y$ kifejezhető $z$ függvényében:

$$x = a(z), \; y = b(z)$$

A metszésvonal paraméteres egyenlete:

$$\boxed{x = a(t), \quad y = b(t), \quad z = t}, \text{ azaz } \boxed{\mathbf{x}(t) = a(t)\cdot\mathbf{i} + b(t)\cdot\mathbf{j} + t\cdot\mathbf{k}}.$$

# Felületek normálvektora, érintősíkja

Ha $(u,v) \to \mathbf{x}(u,v)$ egy sima felület, akkor egy $(u_0,v_0)$ helyen vett **felületi normálvektor**:

$$\boxed{\mathbf{n}(u_0,v_0) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0,v_0)}$$

Az érintősík nemparaméteres egyenlete:

$$\boxed{(\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(u_0,v_0)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0,v_0) \right) = 0}$$

Paraméteres egyenlete:

$$\boxed{\overline{\mathbf{x}}(p,q) = \mathbf{x}(u_0,v_0)) + p \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0,v_0) + q \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0,v_0)}$$

*Példa* (gömbfelület):

$$\boxed{\mathbf{x}(\theta,\varphi) = R\cos\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + R\cos\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{j} + R\sin\theta\cdot\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta} = -R\sin\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{i} - R\sin\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{j} + R\cos\theta\cdot\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi} = -R\cos\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + R\cos\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{j}$$

Innen

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi} = -R^2\cos\theta\cdot(\cos\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{j} + \sin\theta\cdot\mathbf{k}) =$$

$$= -R\cos\theta\cdot\mathbf{x}(\theta,\varphi)$$

(radiális irányú)