Numerikus analízis, gyakorló feladatok

Dr. Gáspár Csaba
Széchenyi István Egyetem, Győr, Hungary
gasparcs@sze.hu

1 Vektornormák

1. Milyen pontok alkotják az $\mathbf{R}^2$ síkon a $(3,3)$ közepű, 2 sugarú körvonalat, ha a távolságot rendre az euklideszi, a maximum-, ill. az összeg-norma szerint definiáljuk?

   Útmutató: Előbb az origó közepű, 2 sugarú körök pontjait célszerű meghatározni. Innen egy $(3,3)$ vektorral való eltolás adja az eredményt.

2. Számítsuk ki az $x = (3,-4,-5) \in \mathbf{R}^3$ vektor maximum-, összeg- és euklideszi normáit.

   Megoldás:

   $||x||_{\max} = \max(3,4,5) = 5$

   $||x||_1 = 3+4+5 = 12$

   $||x||_2 = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$

3. Számítsuk ki az $x = (1,-1,1,-1,1,-1,...) \in \mathbf{R}^n$ vektor maximum-, összeg- és euklideszi normáit.

   Megoldás:

   $||x||_{\max} = 1$

   $||x||_1 = 1+1+...+1 = n$

   $||x||_2 = \sqrt{1^2+1^2+...+1^2} = \sqrt{n}$

4. Számítsuk ki az $x = (1, 2, 3, ..., n) \in \mathbf{R}^n$ vektor maximum-, összeg- és euklideszi normáit.

   Megoldás:

   $||x||_{\max} = n$

   $||x||_1 = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   $||x||_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + ... + n^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

5. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$ reguláris mátrix, akkor az $|||x||| := ||Ax||$ előírással normát definiáltunk $\mathbf{R}^n$-en.

   Megoldás: Bármelyik $\mathbf{R}^n$-beli $||.||$ normát választjuk is:

   - $|||x||| = ||Ax|| \geq 0$ és pontosan akkor 0, ha $x = \mathbf{0}$ (mert A reguláris, így, ha $||Ax|| = 0$, akkor $Ax = \mathbf{0}$, és a homogén egyenletnek csak triviális megoldása van);
   - minden $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén: $|||\alpha \cdot x||| = ||A(\alpha \cdot x)|| = |\alpha| \cdot ||Ax|| = |\alpha| \cdot |||x|||$;
   - minden $x, y \in \mathbf{R}^n$ esetén: $|||x+y||| = ||A(x+y)|| = ||Ax+Ay|| \leq ||Ax|| + ||Ay|| = |||x||| + |||y|||$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $d_1, d_2, ..., d_n > 0$ tetszőleges számok, akkor az $|||x||| := \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot |x_j|$ előírással normát definiáltunk $\mathbf{R}^n$-en.

   Megoldás: Az előző feladatból adódik: itt A egy olyan diagonálmátrix, melynek diagonálelemei rendre $d_1, d_2, ..., d_n$, és $\mathbf{R}^n$ normájaként az összeg-normát választjuk.

7. Normát definiál-e $\mathbf{R}^2$-ben az $|||x||| := (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$ előírás? ($x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$)

   Megoldás:

   - $|||x||| \geq 0$ és pontosan akkor 0, ha $x = (0, 0)$, ez nyilvánvaló;

- minden $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén: $|||\alpha \cdot x||| = (\sqrt{|\alpha| \cdot |x_1|} + \sqrt{|\alpha| \cdot |x_2|})^2 = |\alpha| \cdot (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2 = |\alpha| \cdot |||x|||$;
- a háromszög-egyenlőtlenség viszont általában nem teljesül: legyen pl. $x := (1, 0)$ és $y := (0, 1)$, akkor $x + y = (1, 1)$, így $|||x + y||| = (\sqrt{1} + \sqrt{1})^2 = 4$. Ugyanakkor: $|||x||| = |||y||| = 1$, ezért a megkövetelt $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$ egyenlőtlenség nem teljesül.

Következésképp a fenti előírás nem definiál normát $\mathbf{R}^2$-ben.

8. Mutassuk meg közvetlenül (az általános tételre való hivatkozás nélkül), hogy $\mathbf{R}^n$-ben az összeg- és a maximum norma ekvivalensek.

Megoldás:

- $||x||_{\max} = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$. Legyen k az az index, melyre $|x_k|$ maximális, akkor $||x||_{\max} = |x_k| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k| + ... + |x_n| = ||x||_1$, azaz:

$$||x||_{\max} \leq ||x||_1$$

- $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$. Legyen k az az index, melyre $|x_k|$ maximális, akkor $||x||_1 \leq |x_k| + |x_k| + ... + |x_k| = n \cdot ||x||_{\max}$, azaz:

$$||x||_1 \leq n \cdot ||x||_{\max}$$

A két egyenlőtlenség fennállta épp a norma-ekvivalenciát jelenti.

9. Mutassuk meg közvetlenül (az általános tételre való hivatkozás nélkül), hogy $\mathbf{R}^n$-ben a maximum- és az euklideszi norma ekvivalensek.

Megoldás:

- $||x||_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2$. Legyen k az az index, melyre $|x_k|$ maximális, akkor $||x||_2^2 \leq |x_k|^2 + |x_k|^2 + ... + |x_k|^2 = n \cdot |x_k|^2 = n \cdot ||x||_{\max}^2$, azaz:

$$||x||_2 \leq \sqrt{n} \cdot ||x||_{\max}$$

- Legyen k az az index, melyre $|x_k|$ maximális, akkor $||x||_{\max}^2 = |x_k|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_k|^2 + .. + |x_n|^2 = ||x||_2^2$, azaz:

$$||x||_{\max} \leq ||x||_2$$

A két egyenlőtlenség fennállta épp a norma-ekvivalenciát jelenti.

10. Mutassuk meg közvetlenül (az általános tételre való hivatkozás nélkül), hogy $\mathbf{R}^n$-ben az összeg- és az euklideszi norma ekvivalensek.

Megoldás:

- $||x||_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 \leq (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)^2$ (a jobb oldal kifejtésében ui. pozitív kétszeres szorzatok is előfordulnak, így a négyzetek összege ennél csak kisebb lehet), azaz:

$$||x||_2 \leq ||x||_1$$

- A Cauchy-egyenlőtlenséget használva: $||x||_1^2 = (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)^2 = (1 \cdot |x_1| + 1 \cdot |x_2| + ... + 1 \cdot |x_n|)^2 \leq (1^2 + 1^2 + ... + 1^2) \cdot (|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2) = n \cdot ||x||_2^2$, azaz:

$$||x||_1 \leq \sqrt{n} \cdot ||x||_2$$

A két egyenlőtlenség fennállta épp a norma-ekvivalenciát jelenti.

2 Mátrixnormák

1. Mutassuk meg, hotgy az $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$ mátrixnak az euklideszi norma által indukált mátrixnormája (a spektrálnorma):

$$||A|| = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

Megoldás: Tetszőleges x vektorra: $||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq ||A^*Ax||\cdot||x||$ (a Cauchy-egyenlőtlenség miatt), és ez $\leq ||A^*A||\cdot||x||^2 = \rho(A^*A)\cdot||x||^2$ (mert A^*A önandjungált, pozitív szemidifinit, így a spektrálsugár egyúttal norma is). Tehát $||Ax|| \leq \sqrt{\rho(A^*A)}\cdot||x||$, ezért $||A|| \leq \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Ha pedig x a maximális sajátértékhez tartozó sajátvektor: $A^*Ax = \lambda_{\max}\cdot x$, akkor egyenlőség áll fenn: $||Ax||^2 = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle \lambda_{\max}\cdot x, x\rangle = \lambda_{\max}\cdot||x||^2$.

Ezért $||A|| = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

2. Számítsuk ki az $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sor-, oszlop-, Frobenius- és spektrálnormáját.

Megoldás:

Sor-norma: $||A||_\infty = \max(0+2, 1+1) = 2$

Oszlop-norma: $||A||_1 = \max(0+1, 2+1) = 3$

Frobenius-norma: $||A||_{Fr} = \sqrt{0^2+2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$

A spektrálnorma kiszámításához először számítsuk ki az A^*A mátrixszorzatot:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Most számítsuk ki A^*A sajátértékeit:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

Innen $\lambda_1 = 3+\sqrt{5}$ és $\lambda_2 = 3-\sqrt{5}$. Ezek közül a nagyobbiknak a négyzetgyöke lesz A spektrálnormája:

$$||A|| = \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

3. Számítsuk ki az $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sor-, oszlop-, Frobenius- és spektrálnormáját.

Megoldás:

Sor-norma: $||A||_\infty = \max(2+1, 0) = 3$

Oszlop-norma: $||A||_1 = \max(2+0, 1+0) = 2$

Frobenius-norma: $||A||_{Fr} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

A spektrálnorma kiszámításához először számítsuk ki az A^*A mátrixszorzatot:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Most számítsuk ki A^*A sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

Innen $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 5$. Ezek közül a nagyobbiknak a négyzetgyöke lesz A spektrálnormája:

$$||A|| = \sqrt{5}.$$

4. Számítsuk ki az $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix sor-, oszlop-, Frobenius- és spektrálnormáját. (Itt A szimmetrikus!)

Megoldás:

Sor-norma: $||A||_\infty = \max(2+1, 2+1) = 3$

Oszlop-norma: $||A||_1 = \max(2+1, 1+2) = 3$

Frobenius-norma: $||A||_{Fr} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{10}$

A spektrálnorma kiszámításához először számítsuk ki az A^*A mátrixszorzatot:

$$A^*A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Most számítsuk ki A^*A sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

Innen $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 9$. Ezek közül a nagyobbiknak a négyzetgyöke lesz A spektrálnormája:

$$||A|| = \sqrt{9} = 3.$$

Megjegyzés: mivel itt $A = A^*$, ezért a spektrálnorma egyezik A spektrálsugarával. Valóban, A sajátértékei:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

így a sajátértékek: -1 és -3, azaz $||A|| = \rho(A) = 3$.

5. Számítsuk ki az $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix sor-, oszlop- és spektrálnormáját.
(Itt A szimmetrikus!)

Megoldás:

Sor-norma: $||A||_\infty = \max(3+2+1, 2+1+3, 1+3+2) = 6$

Oszlop-norma: $||A||_1 = \max(3+2+1, 2+1+3, 1+3+2) = 6$

A spektrálnorma kiszámításához először számítsuk ki az A^*A mátrixszorzatot:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 & -7 \\ -7 & 14 & -7 \\ -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Most számítsuk ki A^*A sajátértékeit: $\lambda = 0, 21, 21$ (ellenőrizzük!)
Ezek közül a legnagyobbiknak a négyzetgyöke lesz A spektrálnormája:

$$||A|| = \rho(A^*A) = \sqrt{21}.$$

Megjegyzés: mivel itt $A = A^*$, ezért a spektrálnorma egyezik A spektrálsugarával. Ellenőrizzük!

6. Számítsuk ki az $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sor-, oszlop- és spektrálnormáját.
(Itt A szimmetrikus!)

Megoldás:

Sor-norma: $||A||_\infty = \max(1+1+1, 1+0+0, 1+0+0) = 3$

Oszlop-norma: $||A||_1 = \max(1+1+1, 1+0+0, 1+0+0) = 3$

A spektrálnorma megegyezik A spektrálsugarával (mert A szimmetrikus):

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\lambda^2 - (-\lambda) + \lambda = \lambda^2 - \lambda^3 + 2\lambda = -\lambda\cdot(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

Innen a sajátértékek: $\lambda = 0, -1, 2$. Ezek közül a legnagyobbik abszolút érték lesz A spektrálnormája:

$$||A|| = \rho(A) = 2.$$

3 Fixpont-iterációs feladatok egyváltozós függvényekre

1. Keressük meg az $x^3 - 5x + 2 = 0$ egyenlet pozitív gyökét fixpont-iterációval!

   Megoldás: Jelölje $F(x) := x^3 - 5x + 2$. Akkor $F(0) = 2 > 0$, és $F(1) = 1 - 5 + 2 < 0$, így az egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$ intervallumban.

   Vezessük vissza az egyenletmegoldást fixpontproblémára:

   $$x = \frac{x^3 + 2}{5} =: f(x)$$

   Az f leképezés a $[0, 1]$ intervallumon monoton nő, $f(0) = \frac{2}{5} \in [0, 1]$ és $f(1) = \frac{3}{5} \in [0, 1]$. Ezért f az $[0, 1]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És ezen az intervallumon kontrakció, mert:

   $$|f'(x)| = \frac{3x^2}{5} \leq \frac{3}{5} < 1$$

   A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [0, 1]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

2. Keressük meg az $x^3 - 4x - 2 = 0$ egyenlet egyik gyökét fixpont-iterációval!

   Megoldás: Jelölje $F(x) := x^3 - 4x - 2$. Akkor $F(0) = -2 < 0$, és $F(-1) = -1 + 4 - 2 > 0$, így az egyenletnek van megoldása a $[-1, 0]$ intervallumban.

   Vezessük vissza az egyenletmegoldást fixpontproblémára:

   $$x = \frac{x^3 - 2}{4} =: f(x)$$

   Az f leképezés a $[-1, 0]$ intervallumon (is) monoton nő, $f(-1) = \frac{-1-2}{4} \in [-1, 0]$ és $f(0) = -\frac{2}{4} \in [-1, 0]$. Ezért f az $[-1, 0]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És ezen az intervallumon kontrakció, mert:

   $$|f'(x)| = \frac{3x^2}{4} \leq \frac{3}{4} < 1$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [-1, 0]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

3. Keressük meg az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet egyik gyökét fixpont-iterációval!

   Megoldás: Jelölje $F(x) := x^3 - 3x + 1$. Akkor $F(0) = 1 > 0$, és $F(1) = 1 - 3 + 1 < 0$, így az egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$ intervallumban.

   Vezessük vissza az egyenletmegoldást fixpontproblémára:

$$x = \frac{x^3 + 1}{3} =: f(x)$$

   Az f leképezés a $[0, 1]$ intervallumon monoton nő, $f(0) = \frac{1}{3} \in [0, 1]$ és $f(1) = \frac{1+1}{3} \in [0, 1]$. Ezért f a $[0, 1]$ zárt intervallumot önmagába képezi. Azonban f ezen az intervallumon nem kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \frac{3x^2}{3} \leq \frac{3}{3} = 1,$$

   A kontrakciós tulajdonságot f-nek a $[0, 1]$ intervallum jobb végpontja környékén való viselkedése "rontja el". Próbáljuk ezért szűkíteni ezt az intervallumot, hátha f a szűkebb intervallumon már kontrakció lesz. Tekintsük pl. a $[0, 0.9]$ intervallumot: f ezt még mindig önmagába képezi, mert $f(0) = \frac{1}{3} \in [0, 0.9]$ és $f(0.9) \leq f(1) = \frac{2}{3} \in [0, 0.9]$. És itt f már kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \frac{3x^2}{3} \leq \frac{3 \cdot 0.9^2}{3} < 1,$$

   A fixponttétel tehát itt már alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [0, 0.9]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

4. Keressük meg az $x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ egyenlet (nyilván pozitív) gyökét fixpont-iterációval!

   Megoldás: Jelölje $F(x) := x^2 - 2\sqrt{x} - 2$. Akkor $F(1) = 1 - 2 - 2 < 0$,

és $F(4) = 16 - 2 \cdot 2 - 2 > 0$, így az egyenletnek van megoldása az $[1, 4]$ intervallumban.

Vezessük vissza az egyenletmegoldást fixpontproblémára:

$$x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{x} + 1} =: f(x)$$

Az f leképezés monoton nő, $f(1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+1} = 2 \in [1, 4]$ és $f(4) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+1} = \sqrt{6} \in [1, 4]$. Ezért f az $[1, 4]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És itt f kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{4} < 1$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [1, 4]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

5. Van-e fixpontja az $f(x) := \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ formulával definiált függvénynek? Alkalmazható-e rá a fixpont-iteráció?

Megoldás: Jelölje $F(x) := x - \frac{x}{3} - \frac{1}{x}$. Akkor $F(1) = \frac{2}{3} - 1 < 0$, és $F(2) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} > 0$, így az $F(x) = 0$ egyenletnek van megoldása (tehát f-nek van fixpontja) az $[1, 2]$ intervallumban.

Az f leképezés most *nem* monoton az $[1, 2]$ intervallumon, mégpedig lokális minimuma van az $x = \sqrt{3}$ helyen (ellenőrizzük!). Minimális értéke itt: $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} > 1$. Ugyanakkor f monoton fogy az $[1, \sqrt{3}]$ intervallumon, és monoton nő a $[\sqrt{3}, 2]$ intervallumon. Mivel pedig $f(1) = \frac{1}{3} + 1 \in [1, 2]$, és $f(2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \in [1, 2]$, azért f az $[1, 2]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És itt f kontrakció, mert ha $x \geq 1$, akkor:

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{3} < 1$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [1, 2]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

6. Keressük meg az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökeit fixpont-iterációval!

Megoldás: (Az egyenlet gyökei: (-1) és 3.) Az egyenletet többféleképp is lehet fixpont-alakra hozni.

(a) $x = \sqrt{2x+3} =: f(x)$. Akkor f monoton nő $x \geq 0$-ra, $f(0) = \sqrt{3} \in [0,4]$, és $f(4) = \sqrt{11} \in [0,4]$. Ezért f az $[0,4]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És itt f kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \left|\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [0,4]$ kezdőérték esetén (és 3-hoz tart). Megjegyezzük, hogy f a bővebb $[0,+\infty)$ intervallumot is önmagába képezi, és itt is kontrakció marad, azaz a fixpont-iterációs sorozat x_0 kezdőértéke tetszőleges pozitív szám lehet.

(b) $x = \frac{3}{x-2} =: f(x)$. Most

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2},$$

ezért $|f'(3)| = 3 > 1$, tehát f az $x = 3$ fixpont környezetében biztosan nem kontrakció. (Próbáljuk meg a fixpont-iterációt pl. az $x_0 := 2.9$, majd az $x_0 := 3.1$ kezdőértékekről indítani!)

Ugyanakkor f monoton fogy a $(-\infty, 0]$ intervallumon, és $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(0) = -\frac{3}{2}$ miatt a $(-\infty, 0]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És itt f kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \frac{3}{(x-2)^2} \leq \frac{3}{(-2)^2} < 1.$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 <= 0]$ kezdőérték esetén (és (-1)-hoz tart).

(c) $x = \frac{x^2-3}{2} =: f(x)$. Most $|f'(x)| = |x|$, és ez $x = -1$ és $x = 3$ esetén sem kisebb 1-nél. Így f nem kontrakció egyik gyök környezetében sem. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat csak az $x_0 := -1$ vagy az

$x_0 := 3$ értékekből indítva konvergens, egyébként divergens (próbáljuk pl. $x_0 := 0.9$ vagy $x_0 := 3.1$-ből indítani!).

7. Keressük meg az $x^2 = \cos x$ egyenlet pozitív gyökét fixpont-iterációval!

Megoldás: Jelölje $F(x) := x^2 - \cos x$. Akkor $F(0) = -1 < 0$, és $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - 0 > 0$, így az egyenletnek van megoldása a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumban. Ennél pontosabb becslést is tehetünk: mivel $F(0) < 0$ és $F(\frac{3\pi}{8}) = \frac{9\pi^2}{64} - \cos\frac{3\pi}{8} > \frac{9\pi^2}{64} - 1 > 0$, így az egyenletnek van megoldása a $[0, \frac{3\pi}{8}]$ intervallumban.

Az egyenletet többféleképp lehet fixpont-problémára visszavezetni.

(a)

$$x = \frac{\cos x}{x} =: f(x)$$

Az f leképezés a $[0, \frac{3\pi}{8}]$ intervallumot nem képezi önmagába. Ezenfelül:

$$f'(x) = \frac{(-\sin x) \cdot x - (\cos x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2},$$

ezért az x^* fixpontban:

$$f'(x^*) = -\frac{\sin x^*}{x^*} - \frac{\cos x^*}{x^{*2}} = -\frac{\sin x^*}{x^*} - 1 < -1.$$

Következésképp $|f'| > 1$ nemcsak az x^* fixpontban, hanem annak egy egész környezetében is.

Tehát f nem kontrakció a fixpont egy környezetében, így a fixponttétel nem alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat nem konvergál a fixponthoz (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

(b)

$$x = \sqrt{\cos x} =: f(x)$$

Az f leképezés monoton fogy a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon, így a nála szűkebb $[0, \frac{3\pi}{8}]$ intervallumon is. Továbbá $f(0) = 1 \in [0, \frac{3\pi}{8}]$, és $f(\frac{3\pi}{8}) > 0$, ezért f monoton fogyása miatt $f(\frac{3\pi}{8}) \in [0, \frac{3\pi}{8}]$. Tehát f a $[0, \frac{3\pi}{8}]$ zárt

intervallumot önmagába képezi. És ezen az intervallumon kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x)\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}$$

A jobb oldal mint x függvénye monoton nő a $[0, \frac{3\pi}{8}]$ intervallumon, így:

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\sin\frac{3\pi}{8} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}} \approx 0.7467 < 1.$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [0, \frac{3\pi}{8}]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

8. Keressük meg az $x = \cos 2x$ egyenlet pozitív gyökét fixpont-iterációval!

Megoldás: Jelölje $F(x) := x - \cos 2x$. Akkor $F(0) = -1 < 0$, és $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - 0 > 0$, így az egyenletnek van megoldása a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumban.

Az egyenletet többféleképp lehet fixpont-problémára visszavezetni.

(a) A legkézenfekvőbb a következő választás, hiszen a feladat eleve fixpontproblémaként van megfogalmazva:

$$x = \cos 2x =: f(x)$$

Az f leképezés a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumot nem képezi önmagába (már $f(0)$ sem esik ebbe az intervallumba). Ezenfelül: $|f'(x)| = 2|\sin 2x|$, és ez pl. az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen 2-vel egyenlő, azaz f nem kontrakció ezen az intervallumon. A fixponttétel nem alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat nem konvergál a fixponthoz (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

(b)

$$x = \frac{\arccos x}{2} =: f(x)$$

Az f leképezés monoton fogy a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon. Továbbá $f(0) = \frac{\arccos 0}{2} = \frac{\pi}{4}$, és $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\arccos \frac{\pi}{4}}{2} > 0$ így f monoton fogyása miatt

$f(\frac{\pi}{4}) \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Tehát f az $[0, \frac{\pi}{4}]$ zárt intervallumot önmagába képezi. És ezen az intervallumon kontrakció, mert:

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

A jobb oldal mint x függvénye monoton nő a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon, így:

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}} \approx 0.8077 < 1$$

A fixponttétel tehát alkalmazható. Az $x_{n+1} := f(x_n)$ fixpont-iterációs sorozat konvergens minden $x_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ kezdőérték esetén (próbáljuk ki MATLAB-bal!).

4 Fixpont-iteráció lineáris egyenletrendszerekre

1. Konvergens-e az $x = Bx + f$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := Bx^{(n)} + f$ fixpont-iteráció? $B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$, és $f := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

   Megoldás: A B mátrix sor-normája $\max(\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{6}) = \frac{3}{5} < 1$. (Oszlop-normája is kisebb 1-nél – ellenőrizzük!) Tehát az $x^{(n+1)} := Bx^{(n)} + f$ fixpont-iteráció bármely $x^{(0)} \in \mathbf{R}^3$ kezdőérték mellett konvergens. A konvergencia ténye az f vektortól független.

2. Konvergens-e az $x = Bx + f$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := Bx^{(n)} + f$ fixpont-iteráció? $B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, és $f := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Megoldás: A B mátrix sor-normája 5, oszlop-normája 7, ami nem elegendő a konvergencia biztosításához. Ezért a spektrálsugár kiszámítása szükséges. B sajátértékei 0 és 2 (ellenőrizzük!), azaz $\rho(B) > 1$. Ezért az $x^{(n+1)} := Bx^{(n)} + f$ fixpont-iteráció divergens (próbáljuk ki MATLAB-ban!).

3. Konvergens-e az $x = Bx + f$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := Bx^{(n)} + f$ fixpont-iteráció? Az zérusvektorból indulva, hány iterációs lépés után csökken biztosan a maximum-normában mért hiba 0.001 alá? $B := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$, és $f := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Megoldás: A B mátrix oszlop-normája 1 (ez még nem elég a konvergencia biztosításához), de a sor-normája 0.9, azaz 1-nél kisebb. Így az $x^{(n+1)} := Bx^{(n)} + f$ fixpont-iteráció bármely $x^{(0)} \in \mathbf{R}^3$ kezdőérték mellett konvergens.

A hibabecsléshez felhasználjuk az alábbi formulát:

$$||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{||B||^n}{1 - ||B||} \cdot ||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

Mivel az elérni kívánt hibaszint maximum-normában adott, $||B||$ gyanánt a maximum-norma által indukált mátrixnorma, azaz a sor-norma használandó. Mivel $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, azért nyilván $x^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Az n-edik iterált hibája ezért így becsülhető:

$$||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{0.9^n}{1 - 0.9} \cdot 1 = 10 \cdot 0.9^n$$

A jobb oldal biztosan nem marad 0.001 felett, ha $0.9^n \leq 0.0001$, azaz, ha $n \geq \frac{\log 0.0001}{\log 0.9} \approx 87.4$. A maximum-normában mért hiba tehát a 88. iterációs lépés után már biztosan nem haladja meg a 0.001 értéket. (Megjegyezzük, hogy a becslés nem éles: valójában már kevesebb iterációs lépés is elég ehhez – próbáljuk ki MATLAB-ban!)

5 Az egyszerű iteráció (Richardson-iteráció)

1. Milyen ω paraméter mellett konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := (I - \omega A)x^{(n)} + \omega b$ iteráció? Mi az ω paraméter optimális értéke? Az optimális paraméterértéket használva és az iterációt a zérusvektorból indítva, hány iterációs lépés kell ahhoz, hogy a maximum-normában mért hiba 0.0001 alá csökkenjen? $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, és $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Megoldás: A 2×2-es A mátrix szimmetrikus és pozitív definit (mert determinánsa is (ami a sajátértékek szorzata) és nyoma is (ami a sajátértékek összege) pozitív), így az iteráció minden, "elég kicsi" pozitív ω paraméter mellett konvergens. Használjuk fel, hogy a konvergenciához elegendő, ha $0 < \omega < \frac{2}{||A||}$ tetszőleges, vektornorma által indukált mátrixnorma mellett. Használjunk sor-normát, ebben $||A|| = 3$. Tehát az iteráció biztosan konvergens, ha $0 < \omega < \frac{2}{3}$.

   Az optimális paraméter: $\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$, ahol $\lambda_{\min}$ az A mátrix legkisebb, $\lambda_{\max}$ pedig a legnagyobb sajátértéke. Mivel A 2×2-es, azért a sajátértékek kiszámítása is megtakarítható, mert összegük a mátrix nyoma, azaz 4. Így $\omega_{opt} = \frac{1}{2}$. (Próbáljuk ki az iteráció viselkedését MATLAB-ban, különböző iterációs paraméterek mellett!)

   Az optimális paraméterválasztás mellett az átmeneti mátrix: $B = (I - \frac{1}{2} \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$, melynek sor-normája 0.5.

   A hibabecsléshez felhasználjuk az alábbi formulát:

$$||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{||B||^n}{1 - ||B||} \cdot ||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

   Mivel az elérni kívánt hibaszint maximum-normában adott, $||B||$ gyanánt a maximum-norma által indukált mátrixnorma, azaz a sor-norma használandó. Mivel $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, azért nyilván $x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Az n-edik iterált hibája ezért így becsülhető:

$$||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{0.5^n}{1 - 0.5} \cdot 0.5 = 0.5^n$$

   A jobb oldal biztosan nem marad 0.0001 felett, ha $0.5^n \leq 0.0001$, azaz, ha $n \geq \frac{\log 0.0001}{\log 0.5} \approx 13.28$. A maximum-normában mért hiba tehát a 14.

iterációs lépés után már biztosan nem haladja meg a 0.0001 értéket. (Próbáljuk ki MATLAB-ban!)

2. Milyen ω paraméter mellett konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := (I - \omega A)x^{(n)} + \omega b$ iteráció? Mi az ω paraméter optimális értéke? Az optimális paraméterértéket használva és az iterációt a zérusvektorból indítva, hány iterációs lépés kell ahhoz, hogy a maximum-normában mért hiba 0.0001 alá csökkenjen? $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, és $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Megoldás: Az A mátrix szimmetrikus és pozitív definit (MATLAB segítségével látható, hogy minden sajátértéke pozitív), így az iteráció minden, "elég kicsi" pozitív ω paraméter mellett konvergens. Használjuk fel, hogy a konvergenciához elegendő, ha $0 < \omega < \frac{2}{||A||}$ tetszőleges, vektornorma által indukált mátrixnorma mellett. Használjunk sornormát, ebben $||A|| = 6$. Tehát az iteráció biztosan konvergens, ha $0 < \omega < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   Az optimális paraméter: $\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$, ahol $\lambda_{\min}$ az A mátrix legkisebb, $\lambda_{\max}$ pedig a legnagyobb sajátértéke. A sajátértékeket MATLAB-bal számolva adódik, hogy $\omega_{opt} = 0.25$. (Próbáljuk ki az iteráció viselkedését MATLAB-ban, különböző iterációs paraméterek mellett!)

   Az optimális paraméterválasztás mellett az átmeneti mátrix: $B = (I - 0.25 \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$, melynek sor-normája 0.5.

   A hibabecsléshez felhasználjuk az alábbi formulát:

$$||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{||B||^n}{1 - ||B||} \cdot ||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

   Mivel az elérni kívánt hibaszint maximum-normában adott, $||B||$ gyanánt a maximum-norma által indukált mátrixnorma, azaz a sor-norma használandó. Mivel $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, azért nyilván $x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.50 \\ 0.75 \end{pmatrix}$.

   Az n-edik iterált hibája ezért így becsülhető:

$$||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{0.5^n}{1 - 0.5} \cdot 0.75 = 1.5 \cdot 0.5^n$$

A jobb oldal biztosan nem marad 0.0001 felett, ha $0.5^n \leq 0.0001$, azaz, ha $n \geq \frac{\log \frac{0.0001}{1.5}}{\log 0.5} \approx 13.87$. A maximum-normában mért hiba tehát a 14. iterációs lépés után már biztosan nem haladja meg a 0.0001 értéket. (Próbáljuk ki MATLAB-ban!)

6 A Jacobi-iteráció

Az itteni feladatokban előforduló A mátrixot mindig felbontjuk $A = L + D + U$ módon, ahol D diagonálmátrix, L szigorú alsó, U szigorú felső háromszögmátrix.

1. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -D^{-1}(L+U)x^{(n)} + D^{-1}b$ Jacobi-iteráció?

   $$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ és } b := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   Megoldás: Az A mátrix diagonálisan domináns, így a Jacobi-iteráció biztosan konvergens. Számítsuk ki gyakorlásképp a $B := -D^{-1}(L+U)$ átmeneti mátrixot:

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

   B sor-normája és oszlop-normája is 1-nél kisebb, tehát ismét megkaptuk, hogy a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdővektorból indítva. (Próbáljuk ki MATLAB-ban!)

2. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -D^{-1}(L+U)x^{(n)} + D^{-1}b$ Jacobi-iteráció?

   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ és } b := \begin{pmatrix} 0.5 \\ -3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

   Megoldás: Az A mátrix nem diagonálisan domináns, ezért a $B := -D^{-1}(L+U)$ átmeneti mátrixot kell vizsgálni:

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   B sor-normája 2, oszlop-normája 1.5, egyik sem kisebb 1-nél, úgyhogy a konvergencia ezek alapján még nem dönthető el. Ki kell számítani B spektrálsugarát. B sajátértékei: 0, 0.5 és (-0.5) (ellenőrizzük!), tehát a spektrálsugár: $\rho(B) = 0.5 < 1$. Ezért a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdővektorból indítva. (Próbáljuk ki MATLAB-ban!)

3. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -D^{-1}(L+U)x^{(n)} + D^{-1}b$ Jacobi-iteráció?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -0.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ és } b := \begin{pmatrix} 1.5 \\ -6 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Az A mátrix nem diagonálisan domináns, ezért a $B := -D^{-1}(L+U)$ átmeneti mátrixot kell vizsgálni:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B sor-normája 2, oszlop-normája is 2, azaz 1-nél nem kisebb, úgyhogy a konvergencia ezek alapján még nem dönthető el. Ki kell számítani B spektrálsugarát. B sajátértékei: 0, 0.5 és (-0.5) (ellenőrizzük!), tehát a spektrálsugár: $\rho(B) = 0.5 < 1$. Ezért a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdővektorból indítva. (Próbáljuk ki MATLAB-ban!)

4. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -D^{-1}(L+U)x^{(n)} + D^{-1}b$ Jacobi-iteráció?

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ és } b := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Az A mátrix nem diagonálisan domináns (csak majdnem), ezért a $B := -D^{-1}(L+U)$ átmeneti mátrixot kell vizsgálni:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

B sor-normája 1, oszlop-normája is 1, azaz éppen nem teljesül még a konvergencia elegendő feltétele, a konvergencia ezek alapján még nem dönthető el. Ki kell számítani B spektrálsugarát. B sajátértékei: (-1), 0.5 és (0.5) (ellenőrizzük: az $I + B$ mátrix sajátértékeit már harmadfokú egyenlet megoldása nélkül is lehet számítani!), tehát a spektrálsugár: $\rho(B) = 1$. Ezért a Jacobi-iteráció nem konvergens. (Próbáljuk ki MATLAB-ban a zérusvektorból indítva az iterációt!)

5. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -D^{-1}(L+U)x^{(n)} + D^{-1}b$ Jacobi-iteráció?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix nem diagonálisan domináns, ezért a $B := -D^{-1}(L+U)$ átmeneti mátrixot kell vizsgálni:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

B sor-normája 4, oszlop-normája is 4, azaz nem teljesül a konvergencia elegendő feltétele, a konvergencia ezek alapján még nem dönthető el. Ki kell számítani B spektrálsugarát. B minden sajátértéke 0 (ellenőrizzük!), tehát a spektrálsugár: $\rho(B) = 0$. Ezért a Jacobi-iteráció konvergens.

7 A Gauss-Seidel-iteráció

Az itteni feladatokban előforduló A mátrixot mindig felbontjuk $A = L + D + U$ módon, ahol D diagonálmátrix, L szigorú alsó, U szigorú felső háromszögmátrix.

1. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -(L+D)^{-1}Ux^{(n)} + (L+D)^{-1}b$ Seidel-iteráció?

   $$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ és } b := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   Megoldás: Az A mátrix diagonálisan domináns, így a Seidel-iteráció biztosan konvergens. Számítsuk ki gyakorlásképp a $B := (L+D)^{-1}(-U)$ átmeneti mátrixot:

   $$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{15} & \frac{33}{270} \end{pmatrix}$$

   B sor-normája és oszlop-normája is 1-nél kisebb, tehát ismét megkaptuk, hogy a Seidel-iteráció konvergens minden kezdővektorból indítva. (Próbáljuk ki MATLAB-ban!)

2. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -(L+D)^{-1}Ux^{(n)} + (L+D)^{-1}b$ Seidel-iteráció?

   $$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ és } b := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Megoldás: Az A mátrix nem diagonálisan domináns, de szimmetrikus és pozitív definit: a szimmetria ránézésre megállapítható, a pozitív definitség pedig abból következik, hogy a főminorok pozitívak (ellenőrizzük!). Tehát a Seidel-iteráció konvergens.

   Ez az átmeneti mátrix vizsgálatával is megkapható.

   $$B = -(L+D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0.125 & 0.375 \end{pmatrix}$$

   B sor-normája 1, oszlop-normája 1.125, azaz a konvergencia ezek alapján még nem dönthető el. Ki kell számítani B spektrálsugarát. B

sajátértékei (MATLAB-bal számolva): 0, $0.3125 + 0.1653i$ és $0.3125 - 0.1653i$ tehát a spektrálsugár: $\rho(B) = 0.3535 < 1$. Ezért a Seidel-iteráció konvergens. (Próbáljuk ki MATLAB-ban a zérusvektorból indítva az iterációt!)

3. Konvergens-e az $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerre alkalmazott $x^{(n+1)} := -(L+D)^{-1}Ux^{(n)} + (L+D)^{-1}b$ Seidel-iteráció?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix nem diagonálisan domináns, és nem is önadjungált, ezért a $B := (L+D)^{-1}(-U)$ átmeneti mátrixot kell vizsgálni:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B sor-normáját, és oszlopnormáját nem is érdemes kiszámítani, mert B felső háromszögmátrix, így a sajátértékek közvetlenül leolvashatók, a fődiagonálisról. A sajátértékek tehát 0 és 2, így a spaktrálsugár: $\rho(B) = 2$. Ezért a Seidel-iteráció nem konvergens.

8 A Gauss- és a Gauss-Jordan elimináció

1. Regulárisak-e az alábbi mátrixok?

   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

   Megoldás:

   (a) reguláris, mert $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \neq 0$

   (b) szinguláris, mert $\det(A) = 1\cdot(-1+9)-(-1)\cdot(-1-3)+1\cdot(-3-1) = 0$.

   Megjegyzés: A (b) esetben a mátrix szingularitása úgy is belátható, hogy az $Ax = \mathbf{0}$ homogén egyenletnek van nemtriviális megoldása, pl. $(2, 1, -1)$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

   Megoldás: A számítás sémája a következő:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

   Eliminájunk az első oszlopban. A számolás egyszerűbb, ha a_{11} elem éppen 1. Ezért cseréljük fel az 1. és 2. sorokat, majd az (új) 1. sor (-2)-szeresét adjuk hozzá a 2., majd a 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 5 & 7 & -9 \end{array}\right)$$

Végezzük el az eliminálást a 2. oszlopban. A 2. sor (-5)- szörösét adjuk hozzá a 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -28 & 56 \end{array}\right)$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \\ x_2 + 7x_3 & = & -13 \\ -28x_3 & = & 56 \end{array}$$

Az utolsó egyenletből:

$$x_3 = -2$$

Visszahelyettesítve ezt a második egyenletbe, innen:

$$x_2 = 1$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe x_3 és x_2 értékeit, kapjuk, hogy:

$$x_1 = 2$$

Tehát a megoldás:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -2$$

3. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & + & 2z & = & 5 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 4x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Megoldás: A számítás sémája a következő:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 7 & 14 \\ 0 & -17 & -9 & -18 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -17 & -9 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A megoldás tehát: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.

4. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-Jordan-eliminációval:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Megoldás: Felcserélve az 1. és 2. sorokat, majd az (új) 1. sor (-2)-szeresét hozzáadva a 2., majd a 3. sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 5 & 7 & -9 \end{array}\right)$$

A második sor segítségével eliminájunk lefelé:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -28 & 56 \end{array}\right)$$

Folytassuk az eliminálást felfelé is. (Ebben különbözik a Gauss-Jordan-algoritmus a Gauss-eliminációtól.) A második sor kétszeresét az első sorhoz adva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 11 & -20 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -28 & 56 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 11 & -20 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

A harmadik oszlopban felfelé eliminálva:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Innen végül:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = -2$$

5. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: Mindenekelőtt: a rendszer mátrixa most szinguláris (mert determinánsa 0; ellenőrizzük!). Ez azt jelenti, hogy a megoldhatóság a jobb oldaltól függ: vagy van megoldás (és akkor mindjárt végtelen sok is), vagy nincs megoldás. A számítás sémája a következő:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az utolsó eliminálásnál a 3. sor csupa 0 lett. Ez azt jelenti, hogy az egyik ismeretlen, pl. x_3 szabadon megválasztható: $x_3 := t$ (ahol $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges). Így a 3. sor így alakul:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Az eliminálást folytatva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1-3t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}+\frac{5}{3}t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3}+\frac{1}{3}t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}+\frac{5}{3}t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszernek tehát végtelen sok megoldása van, mégpedig tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ mellett:

$$x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t, \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t, \quad x_3 = t$$

6. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: A számítás sémája a következő:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fellépett egy csupa nullából álló sor. Ez azt jelenti, hogy az egyik ismeretlent (célszerűen x_4-et), szabadon megválaszthatjuk, így végtelen sok megoldás van. Legyen tehát $x_4 := t$ és folytassuk az eliminálást.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 0 & -3t \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 0 & -3t \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Innen az egyenletrendszer megoldása leolvasható:

$$x_1 = -\frac{t}{2}, \qquad x_2 = \frac{3t}{2}, \qquad x_3 = \frac{t}{2}, \qquad x_4 = t$$

ahol $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges.

7. Számítsuk ki Gauss-eliminációval az alábbi mátrix inverzét:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A számítás sémája a következő:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Első lépésben cseréljük fel az 1. és a 2. sort, majd végezzük el az első oszlop eliminálását.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Kaptuk tehát, hogy:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Számítsuk ki Gauss-eliminációval az alábbi mátrix inverzét:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A számítás sémája a következő:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Cseréljük meg a 2. és 3. egyenletet (a hozzájuk tartozó jobb oldalakkal együtt, hogy az eliminációt folytatni tudjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Az inverz mátrix tehát:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

9. Hogyan alakul a

$$\begin{array}{rcrcrcr} tx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ty & + & z & = & t \\ x & + & y & + & tz & = & t^2 \end{array}$$

egyenletrendszer megoldhatósága a t valós paraméter különböző értékei mellett?

Megoldás: Ha a rendszer determinánsa nem 0, akkor a rendszer egyértelműen megoldható. Vizsgáljuk meg tehát, hogy milyen t értékek mellett zérus a determináns.

A determináns kifejtése:

$$t(t^2-1)-(t-1)+(1-t)=(t-1)(t^2+t-2)$$

Ezért a determináns pontosan akkor zérus, ha $t=1$ vagy

$t^2+t-2=0$, azaz $t=1$ vagy $t=-2$.

A $t=1$ esetben az egyenlet:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

ennek pedig végtelen sok megoldása van: két ismeretlen, pl. y és z szabadon megválasztható, ezekután $x=1-y-z$.

A $t=-2$ esetben az egyenlet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 4 \end{array}$$

Összeadva az egyenleteket, a bal oldalak összege 0, a jobboldalaké 1, ami nem lehetséges. Ekkor tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

9 Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)[(2+\lambda)^2 - 1] - (-2-\lambda-1) + (1+2+\lambda) =$$
$$= -(\lambda+2)^3 + 2 + \lambda + 2 + \lambda + 1 + 1 + 2 + \lambda =$$
$$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda+3)^2$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei, tehát a 0 és a -3 számok.

A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$(A - 0 \cdot I)s = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Ilyen megoldás (konstans szorzótól eltekintve) egyetlenegy van, az $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor.

A $\lambda = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$(A + 3 \cdot I)s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Itt most két ismeretlen is megválasztató szabadon, így két, lineárisan független megoldás is létezik, pl. az $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, és az $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor.

2. Határozzuk meg az

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda[(-\lambda - 1)^2 - 1] = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = -2$.

A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$(A - 0 \cdot I)s = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Ilyen kettő is van, melyek lineárisan függetlenek. Ezek alakja $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, és $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Pontosabban, a sajátvektor általános alakja most: $s = \begin{pmatrix} u \\ u \\ v \end{pmatrix}$, ahol u és v közül legalább az egyikük nem zérus.)

A $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$(A + 2 \cdot I)s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Ilyen (konstans szorzótól eltekinve) egyetlenegy van, éspedig: $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Határozzuk meg az

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((8-\lambda)(3-\lambda)+6)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ és $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor az

$$(A - 2 \cdot I) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Ez konstans szorzótól eltekintve egyértelmű, éspedig: $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A $\lambda = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor az

$$(A - 5 \cdot I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Ez konstans szorzótól eltekintve egyértelmű, éspedig: $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

A $\lambda = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektor az

$$(A - 6 \cdot I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} s = \mathbf{0}$$

homogén egyenlet nemtriviális megoldása. Ez konstans szorzótól eltekintve egyértelmű, éspedig: $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. Definitség szempontjából osztályozzuk az $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és a $B := \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ önadjungált mátrixokat.

   Megoldás: Az A mátrix pozitív definit, mert determinánsa és nyoma egyaránt pozitív. A B mátrix indefinit, mert determinánsa negatív.

5. Definitség szempontjából osztályozzuk az $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ önadjungált mátrixot.

   Megoldás: Írjuk fel az A mátrix minormátrixait.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

   Számítsuk ki a minormátrixok determinánsait:

$$\det A_1 = 4$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 1 = 7$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-6) - 0 + 8 \cdot 7 = 38$$

   Az A mátrix tehát pozitív definit, mivel minden minormátrixának determinánsa pozitív.

10 Mátrixok LU-felbontása

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mindenekelőtt L-et a már ismert elemeivel kitöltjük: a főátlóban 1-esek állnak, a főátló felett zérusok:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Majd elkezdjük az eliminációt: A első sorának $\frac{-2}{2}$-szeresét kivonjuk a második, $\frac{4}{2}$-szeresét a harmadik sorból, e szorzókat ($\frac{-2}{2}$ és $\frac{4}{2}$) pedig beírjuk L első oszlopának második ill. harmadik helyére:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Folytatjuk az eliminációt: a mátrix második sorának $\frac{3}{-3}$-szorosát kivonjuk a harmadik sorból, a $\frac{3}{-3}$ szorzót pedig beírjuk L második oszlopának harmadik helyére. Ezzel az eredeti mátrixból felső háromszög mátrixot kaptunk (ez lesz a felbontás U mátrixa), és egyidejüleg az L-et is megkaptuk.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ellenőrizzük az eredményt az LU szorzat közvetlen kiszámításával!)

Más megoldás: Töltsük ki az L és U mátrixok előre ismert elemeit:

- L főátlójában csupa 1-esek állnak;
- L főátlója felett csupa 0-k állnak;
- L első oszlopának további elemei: A_{21}/A_{11}, A_{31}/A_{11}, A_{41}/A_{11}, ...
- U főátlója alatt csupa 0-k állnak;

- U első sora mindig egyezik A első sorával.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ezekután L k-adik sorát U j-edik oszlopával szorozva az eredeti A mátrix A_{kj}-edik elemét kell kapjuk. A sorok és az oszlopok ügyes megválasztásával elérhető, hogy minden így nyert egyenletben csak egy ismeretlen szerepeljen, amit aztán mindjárt be is írhatunk L ill. U megfelelő helyére.

Például, L második sorát U második oszlopával szorozva: $(-1)\cdot(-2)+1\cdot u_{22}+0=-1$, ahonnan u_{22} kifejezhető: $u_{22}=-3$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Most L harmadik sorát szorozzuk U második oszlopával: $2\cdot(-2)+\ell_{32}\cdot(-3)+0=-1$, ahonnan ℓ_{32} kifejezhető: $\ell_{32}=-1$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ezzel L-et már ki is számítottuk. L második sorát szorozva U harmadik oszlopával: $(-1)\cdot 4+1\cdot u_{23}+0=-1$, ahonnan u_{23} kifejezhető: $u_{23}=3$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Végül L harmadik sorát szorozva U harmadik oszlopával: $2\cdot 4+(-1)\cdot 3+1\cdot u_{33}=3$, ahonnan u_{33} kifejezhető: $u_{33}=-2$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ezzel a kívánt LU-felbontást megkaptuk.

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mindenekelőtt L-et a már ismert elemeivel kitöltjük: a főátlóban 1-esek állnak, a főátló felett zérusok:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Majd elkezdjük az eliminációt: A első sorának $\frac{2}{4}$-szeresét kivonjuk a második, $\frac{1}{4}$-szeresét a harmadik sorból, e szorzókat ($\frac{2}{4}$ és $\frac{1}{4}$) pedig beírjuk L első oszlopának második ill. harmadik helyére:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & . & 1 \end{pmatrix}$$

Folytatjuk az eliminációt: a mátrix második sorának $\frac{1}{2}$-szeresét kivonjuk a harmadik sorból, az $\frac{1}{2}$ szorzót pedig beírjuk L második oszlopának harmadik helyére. Ezzel az eredeti mátrixból felső háromszög mátrixot kaptunk (ez lesz a felbontás U mátrixa), és egyidejűleg az L-et is megkaptuk.

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(Ellenőrizzük az eredményt az LU szorzat közvetlen kiszámításával! Próbáljuk ki az első feladatban mutatott mátrixszorzásos módszert is!)

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2.5 & 3 & 2 \\ 1.25 & 1.5 & -4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mindenekelőtt L-et a már ismert elemeivel kitöltjük: a főátlóban 1-esek állnak, a főátló felett zérusok:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2.5 & 3 & 2 \\ 1.25 & 1.5 & -4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Majd elkezdjük az eliminációt: A első sorának 0.5-szeresét kivonjuk a második, 0.25-szorosát a harmadik sorból, e szorzókat (0.5 és 0.25) pedig beírjuk L első oszlopának második ill. harmadik helyére:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4.5 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Folytatjuk az eliminációt: a mátrix második sorának 0.5-szeresét kivonjuk a harmadik sorból, az 0.5 szorzót pedig beírjuk L második oszlopának harmadik helyére. Ezzel az eredeti mátrixból felső háromszög mátrixot kaptunk (ez lesz a felbontás U mátrixa), és egyidejűleg az L-et is megkaptuk.

$$U = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ellenőrizzük az eredményt az LU szorzat közvetlen kiszámításával! Próbáljuk ki az első feladatban mutatott mátrixszorzásos módszert is!)

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mindenekelőtt L-et a már ismert elemeivel kitöltjük: a főátlóban 1-esek állnak, a főátló felett zérusok:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Majd elkezdjük az eliminációt: A első sorának $\frac{1}{2}$-szeresét kivonjuk a második sorból (a harmadik sorból nem kell kivonni semmit, mert az első eleme 0), a szorzókat ($\frac{1}{2}$ és 0) pedig beírjuk L első oszlopának második ill. harmadik helyére:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Folytatjuk az eliminációt: a mátrix második sorának $\frac{2}{3}$-szorosát kivonjuk a harmadik sorból, az $\frac{2}{3}$ szorzót pedig beírjuk L második oszlopának harmadik helyére. Ezzel az eredeti mátrixból felső háromszög mátrixot kaptunk (ez lesz a felbontás U mátrixa), és egyidejűleg az L-et is megkaptuk.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(Ellenőrizzük az eredményt az LU szorzat közvetlen kiszámításával! Próbáljuk ki az első feladatban mutatott mátrixszorzásos módszert is!)

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mindenekelőtt L-et a már ismert elemeivel kitöltjük: a főátlóban 1-esek állnak, a főátló felett zérusok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Majd elkezdjük az eliminációt: A első sorát kivonjuk a második és a harmadik sorból, az itt fellépő szorzókat (1 és 1) pedig beírjuk L első oszlopának második ill. harmadik helyére:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Folytatjuk az eliminációt: a mátrix második sorát kivonjuk a harmadik sorból, az itt fellépő 1-es szorzót pedig beírjuk L második oszlopának harmadik helyére. Ezzel az eredeti mátrixból felső háromszög mátrixot kaptunk (ez lesz a felbontás U mátrixa), és egyidejűleg az L-et is megkaptuk.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ellenőrizzük az eredményt az LU szorzat közvetlen kiszámításával! Próbáljuk ki az első feladatban mutatott mátrixszorzásos módszert is! Próbáljuk az LU-felbontást nagyobb méretű, de hasonló struktúrájú mátrixokra is, pl. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mindenekelőtt L-et a már ismert elemeivel kitöltjük: a főátlóban 1-esek állnak, a főátló felett zérusok:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Majd elkezdjük az eliminációt: A első sorának (-1)-szeresét kivonjuk a második sorból, magát az első sort pedig a harmadik sorból; e szorzókat ((-1) és 1) pedig beírjuk L első oszlopának második ill. harmadik helyére:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Folytatjuk az eliminációt: a mátrix második sorának (-1)-szeresét kivonjuk a harmadik sorból, az (-1) szorzót pedig beírjuk L második

oszlopának harmadik helyére. Ezzel az eredeti mátrixból felső háromszög mátrixot kaptunk (ez lesz a felbontás U mátrixa), és egyidejűleg az L-et is megkaptuk.

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ellenőrizzük az eredményt az LU szorzat közvetlen kiszámításával! Próbáljuk ki az első feladatban mutatott mátrixszorzásos módszert is!)

11 Mátrixok sajátértékeinek behatárolása

1. A determináns kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi mátrix reguláris:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -0.5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Jelölje $G(z, r)$ a komplex síkon a z középpontú, r sugarú zárt körlemezt. A mátrix Gersgorin-körei: $G(2, 1.5)$, $G(3, 2)$, $G(2, 1)$. Ezek egyike sem tartalmazza a zérust. Ezért a 0 nem sajátértéke A-nak, így a mátrix valóban reguláris.

2. A sajátértékek kiszámítása nélkül (és a főminorok kiszámítása nélkül) mutassuk meg, hogy az alábbi mátrix pozitív definit:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0.5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix önadjungált, így a sajátértékek valósak, ezért a Gersgorin-köröknek elég a valós tengellyel való metszeteit nézni, amik intervallumok. Ezek: [0.5, 5.5], [1, 5] és [1, 2]. Ezen intervallumok egyesítése csupa pozitív számot tartalmaz. Ezért A minden sajátértéke pozitív, tehát a mátrix pozitív definit.

3. Adjunk az alábbi mátrix kondíciószámára felső becslést:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0.5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix önadjungált, pozitív definit (ld. az előző feladatot), így a kondíciószám:

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

A Gersgorin-intervallumok: [0.5, 5.5], [1, 5] és [1, 2], ahonnan:

$$\lambda_{\max} \leq 5.5, \qquad \lambda_{\min} \geq 0.5,$$

Innen egy felső becslés azonnal adódik:

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq \frac{5.5}{0.5} = 11.$$

4. Tekintsük az alábbi mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Gersgorin tétele szerint az A mátrix 4-hez közeli sajátértékére teljesül, hogy $|\lambda - 4| \leq 0.75$ (valóban van ilyen sajátérték). Adjunk erre a sajátértékre egy ennél pontosabb becslést.

Megoldás: Az ötlet az, hogy bármilyen reguláris C mátrixra A és $C^{-1}AC$ sajátértékei megegyeznek. A gyakorlatban ez legegyszerűbben a diagonálmátrixokra kivitelezhető. Próbálkozzunk az alábbi diagonálmátrixszal:

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Akkor:

$$D^{-1}AD := \begin{pmatrix} 4 & 0.25 & 0.125 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

(ellenőrizzük!) Innen Gersgorin tétele alapján a $|\lambda - 4| \leq 0.375$, az előbbinél jobb becslés adódik. (A sajátérték 2 tizedesjegyre kerekítve egyébként: $\lambda = 4.12$.)

Próbálkozzunk most a következő diagonálmátrixszal:

$$D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Akkor:

$$D^{-1}AD := \begin{pmatrix} 4 & 0.1250 & 0.0625 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

(ellenőrizzük!) Gersgorin tétele alapján most $|\lambda - 4| \leq 0.1875$, azaz még jobb becslést kaptunk.

Azonban ez a taktika nem alkalmazható korlátlanul. Ha most a következő diagonálmátrixszal próbálkozunk:

$$D := \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

akkor:

$$D^{-1}AD := \begin{pmatrix} 4 & 0.050 & 0.025 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2.5 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

(ellenőrizzük!) Most az első Gersgorin-kör ugyan még szűkebb lett, a másik kettő viszont nagyobb, és belemetsz az elsőbe. Így a Gersgorin-tétel alapján csak azt mondhatjuk, hogy a sajátérték benne van a három kör uniójában, ami az előzőeknél sokkal rosszabb becslés.

5. Tekintsük az alábbi mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Gersgorin tétele szerint az A mátrix 5-hez közeli sajátértékére teljesül, hogy $|\lambda - 5| \leq 1$ (valóban van ilyen sajátérték). Adjunk erre a sajátértékre egy ennél pontosabb becslést.

Megoldás: Az ötlet itt is az, hogy valamilyen reguláris D diagonálmátrixszal kiszámítjuk a $D^{-1}AD$ mátrixot: ennek sajátértékei megegyeznek A sajátértékeivel.

Az előző feladat megoldásából véve az ötletet, legyen:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Akkor:

$$D^{-1}AD := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

(ellenőrizzük!) Innen Gersgorin tétele alapján a $|\lambda - 5| \leq 0.5$, az előbbinél jobb becslés adódik. (A sajátérték 2 tizedesjegyre kerekítve: $\lambda = 5.31$)

De ha a következő diagonálmátrixszal próbálkozunk:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

akkor:

$$D^{-1}AD := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0.5 & 0 \\ 0.3333 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

(ellenőrizzük!) A második Gersgorin-kör ugyan tovább szűkült, de az első tágabb lett és belemetsz a másodikba, ami elrontja a becslést.

6. Tekintsük az alábbi mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Gersgorin tétele nem zárja ki a lehetőséget, hogy a mátrix szinguláris legyen: a 3. Gersgorin-kör tartalmazza a zérust, így az elvileg lehet sajátértéke A-nak. Mutassuk meg, hogy a mátrix mégis reguláris.

Megoldás: Az ötlet továbbra is az, hogy valamilyen reguláris D diagonálmátrixszal kiszámítjuk a $D^{-1}AD$ mátrixot: ennek sajátértékei megegyeznek A sajátértékeivel. Igyekszünk kissé szűkíteni a 3. Gersgorin-kört, ezért legyen most:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6666 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Akkor:

$$D^{-1}AD := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.75 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.6666 \\ 0 & 0.5 & -0.75 & 1.5 \end{pmatrix}$$

(ellenőrizzük!) Itt már egyik Gersgorin-kör sem tartalmazza a zérust, tehát a zérus nem sajátértéke A-nak. Ezért a mátrix valóban reguláris.

12 Mátrixok sajátértékeinek közelítő kiszámítása. A hatvány-módszer és változatai

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékét a hatvány-módszerrel:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix önadjungált, így a hatvány-módszer biztosan alkalmazható. Induljunk ki az $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kezdő vektorból. Akkor $x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, a Rayleigh-hányados pedig:

$$\frac{\langle Ax^{(1)}, x^{(1)} \rangle}{||x^{(1)}||^2} = 9$$

Folytatva az iterációt: $x^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}$, (ami 9-szerese $x^{(1)}$-nek), és a Rayleigh-hányados változatlan marad:

$$\frac{\langle Ax^{(2)}, x^{(2)} \rangle}{||x^{(1)}||^2} = 9$$

És így tovább, a Rayleigh-hányadosok a 9 értéken maradnak, az iterált vektorok pedig az $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektor konstansszorosai. Így a domináns sajátértéket ($\lambda = 9$) egyetlen iterációs lépés után megkaptuk, a hozzátartozó sajátvektor pedig az előbbi $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektor (ellenőrizzük!).

Megjegyzés: Ez a jelenség, hogy egyetlen lépés alatt megkapjuk a domináns sajátértéket, ritka. Akkor fordul elő, ha (mint ez esetben is) a mátrix összes többi sajátértéke zérus (ellenőrizzük!) Legyenek tehát

a sajátértékek: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, a hozzátartozó ortonormált sajátvektorok pedig $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$. Írjuk fel a kezdő $x^{(0)}$ vektort ebben a bázisban:

$$x^{(0)} = \alpha^{(1)} s^{(1)} + \alpha^{(2)} s^{(2)} + \alpha^{(3)} s^{(3)}$$

ahol $\alpha^{(3)} \neq 0$ a hatvány-módszer kezdővektorára tett feltevés miatt. Akkor a következő iterált vektorok:

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \alpha^{(1)}\lambda_1 \cdot s^{(1)} + \alpha^{(2)}\lambda_2 \cdot s^{(2)} + \alpha^{(3)}\lambda_3 \cdot s^{(3)} =$$

$$= \alpha^{(3)}\lambda_3 \cdot s^{(3)},$$

majd

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} = \alpha^{(3)}\lambda_3^2 \cdot s^{(3)},$$
$$x^{(3)} = Ax^{(2)} = \alpha^{(3)}\lambda_3^3 \cdot s^{(3)},$$

és így tovább. A Rayleigh-hányados pedig nem változik az iteráció során:

$$\frac{\langle Ax^{(1)},\, x^{(1)}\rangle}{||x^{(1)}||^2} = \frac{(\alpha^{(3)})^2\lambda_3^3}{(\alpha^{(3)})^2\lambda_3^2} = \lambda_3,$$
$$\frac{\langle Ax^{(2)},\, x^{(2)}\rangle}{||x^{(2)}||^2} = \frac{(\alpha^{(3)})^2\lambda_3^5}{(\alpha^{(3)})^2\lambda_3^4} = \lambda_3,$$
$$\ldots$$

2. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

és alkalmazzuk rá a hatvány-módszert. Kiindulva az $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kezdeti közelítésből, az egymást követő iteráltak: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, ... (ellenőrizzük!) és a Rayleigh-hányadosok 2-höz tartanak (vizsgáljuk MATLAB-ban!), noha a mátrix

sajátértékei $\lambda = 1, 2, 3$ (ellenőrizzük!), így a domináns sajátérték 3 és nem 2. Miért?

Megoldás: A mátrix önadjungált, így a hatvány-módszer biztosan alkalmazható. A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $s^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ellenőrizzük!). Innen $\langle x^{(0)}, s^{(3)} \rangle = 0$, azaz a hatvány-módszerben szereplő feltétel nem teljesül.

Megjegyzés: Az $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kezdő vektorral indítva a hatvány-módszert, a Rayleigh-hányadosok már a domináns sajátértékhez konvergálnak. Próbáljuk ki MATLAB-ban!

3. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek sajátértékei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ (ellenőrizzük!). Így $|\lambda_1| < |\lambda_2| = |\lambda_3|$, tehát a hatvány-módszer feltételei nem teljesülnek; a Rayleigh-hányadosok (a kezdő vektortól függő) fals értéken maradnak (próbáljuk ki MATLAB-ban!). Hogyan, milyen módosítással lehetne mégis alkalmazni a hatvány-módszert valamelyik legnagyobb abszolút értékű sajátérték meghatározására?

Megoldás: Minden c szám esetén az $(A + c \cdot I)$ mátrix sajátértékei: $(c + \lambda_1)$, $(c + \lambda_2)$, $(c + \lambda_3)$. Pozitív c esetén így $(c + \lambda_3)$, negatív c esetén pedig $(c + \lambda_2)$ domináns sajátértéke lesz $(A + c \cdot I)$-nek, így a hatvány-módszerrel már számíthatók – ahonnan persze λ_3 ill. λ_2 visszaszámítható.

4. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennek sajátértékei: $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1.5$ (ellenőrizzük!). Alkalmazzuk a hatvány-módszert. Kiindulva az $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kezdővektorból, a hatvány-módszer minden lépésben az $x^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektort adja (ellenőrizzük!). Így a Rayleigh-hányados értéke mindig

$$\frac{\langle Ax^{(n)},\, x^{(n)} \rangle}{||x^{(n)}||^2} = 1,$$

noha a domináns sajátérték nem 1, hanem 1.5. Ez ellentmondani látszik a hatvány-módszerre vonatkozó tételnek. Oldjuk fel ezt az ellentmondást.

Megoldás: A domináns sajátértékhez tartozó sajátvektor: $s^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ellenőrizzük!), és erre az $x^{(0)}$ kezdővektor ortogonális volt. Tehát nem teljesülnek a hatvány-módszerre vonatkozó tétel feltételei.

Megjegyzések:

- Nem kell kiszámítani a domináns sajátértékhez tartozó sajátvektort, ha észrevesszük, hogy az $x^{(0)}$ kezdővektor épp a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor; ezekután alkalmazzuk azt a lineáris algebrai tételt, hogy egy önadjungált mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok szükségképp ortogonálisak, tehát $x^{(0)}$ és $s^{(3)}$ ortogonálisak.
- Ha kezdővektorként az $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektort vesszük, akkor a hatvány-módszerben a Rayleigh-hányadosok sorozata már a domináns sajátértékhez tart (próbáljuk ki MATLAB-ban!)

5. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki hatvány-módszerrel ennek domináns sajátértékét (λ_3), és a hozzátartozó, 1 normájú sajátvektort ($x^{(3)}$). Mik lesznek a

$$B := A - \lambda_3 \cdot s^{(3)}(s^{(3)})^*$$

mátrix sajátértékei?

Az eredmény alapján számítsuk ki az A mátrixnak a dominánsnál kisebb abszolút értékű következő sajátértékét.

Megoldás: Legyenek λ_1, λ_2, λ_3 a sajátértékek (abszolút érték szerint növekvő sorrendben), a hozzátartozó ortonormált sajátvektorok pedig $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$. A hatvány-módszert alkalmazva, kb. $15 - 20$ lépésen belül megkapjuk a domináns sajátértéket ($\lambda_3 = 3$), és a hozzátartozó 1 normájú sajátvektort: $s^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Akkor:

$$Bs^{(1)} = As^{(1)} - \lambda_3 \cdot s^{(3)}((s^{(3)})^* s^{(1)}) = As^{(1)} = \lambda_1 s^{(1)}$$

$$Bs^{(2)} = As^{(2)} - \lambda_3 \cdot s^{(3)}((s^{(3)})^* s^{(2)}) = As^{(2)} = \lambda_2 s^{(2)}$$

$$Bs^{(3)} = As^{(3)} - \lambda_3 \cdot s^{(3)}((s^{(3)})^* s^{(3)}) = As^{(3)} - \lambda_3 s^{(3)} = \mathbf{0}$$

Tehát B sajátértékei: 0, λ_1, λ_2. Így B-re a hatvány-módszert alkalmazva, λ_2 már számítható.

Jelen esetben:

$$s^{(3)}(s^{(3)})^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad 0 \quad -1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan:

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

A hatvány-módszerrel így a következő legnagyobb abszolút értékű sajátértékre $\lambda_2 = 2$ adódik (próbáljuk ki MATLAB-ban!).

6. Számítsuk ki az

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix legkisebb abszolút értékű sajátértékét inverz iterációval.

Megoldás: A mátrix szinguláris, így $\lambda_1 = 0$. Ezért az inverz iteráció nem alkalmazható, mert az iteráció egyes lépéseiben szinguláris mátrixú egyenletet kell megoldani. Erre az alkalmazott szoftver nem mindig figyelmeztet! A módszer fals eredményt ad, ha egyáltalán ad eredményt.

Viszont valamilyen (kicsi) $c > 0$ számra $(A + c \cdot I)$ már reguláris lehet, sajátértékei pedig A sajátértékeinek c-vel való eltoltjai. Például jelen esetben $c := 1$-re:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

és inverz iterációval szépen ki is jön, hogy ennek legkisebb abszolút értékű sajátértéke 1, azaz A legkisebb abszolút értékű sajátértéke 0.

Tanulság: az inverz iteráció alkalmazása előtt mindig ellenőrizzük a mátrix regularitását!

13 Interpoláció

1. Határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú polinomot, mely az $x_0 := -1$, $x_1 := 0$, $x_2 := 1$ helyeken rendre az $f_0 := 0$, $f_1 := 2$ ill. az $f_2 := 0$ értékeket veszi fel.

   Megoldás: A feladat az adatokra illeszkedő legfeljebb másodfokú Lagrange-interpolációs polinom előállítása.

   1. megoldás: Keressük az interpolációs polinomot

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

   alakban. Az egyelőre ismeretlen a_0, a_1, a_2 együtthatók a $P(x_k) = f_k$ $(k = 0, 1, 2)$ interpolációs egyenlőségekből határozhatók meg. Jelen esetben ez az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &= 0 \\ a_0 &= 2 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

   Az egyenletrendszer megoldása: $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, így az interpolációs polinom: $P(x) = 2 - 2x^2$.

   2. megoldás: Állítsuk elő az interpolációs polinomot

$$P(x) = f_0 \cdot \ell_0(x) + f_1 \cdot \ell_1(x) + f_2 \cdot \ell_2(x)$$

   alakban, ahol ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 a Lagrange-féle alappolinomok:

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot(-1)} = -x^2 + 1$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)x}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

   Innen:

$$P(x) = 0 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 2 \cdot \left(-x^2 + 1\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= -2x^2 + 2$$

3. megoldás: Osztott differenciák használata:

$$
\begin{array}{cccccc}
j & x_j & f_j & & & \\
0 & -1 & \boxed{0} & & & \\
 & & & \rangle \ \frac{2-0}{0-(-1)} = \boxed{2} & & \\
1 & 0 & 2 & & \rangle \ \frac{-2-2}{1-(-1)} = \boxed{-2} & \\
 & & & \rangle \ \frac{0-2}{1-0} = -2 & & \\
2 & 1 & 0 & & &
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(x) = 0 + 2 \cdot (x+1) - 2 \cdot (x+1)(x-0) = 2 - 2x^2$$

2. Határozzuk meg azt a legfeljebb elsőfokú polinomot, mely az $x_0 := a$, $x_1 := b$ helyeken az $f_0 := f(a)$ ill. $f_1 := f(b)$ értékeket veszi fel.

Megoldás: A feladat az adatokra illeszkedő legfeljebb elsőfokú Lagrange-interpolációs polinom előállítása.

1. megoldás: Állítsuk elő az interpolációs polinomot

$$P(x) = f_0 \cdot \ell_0(x) + f_1 \cdot \ell_1(x)$$

alakban, ahol ℓ_0, ℓ_1 a Lagrange-féle alappolinomok:

$$\ell_0(x) = \frac{x-b}{a-b}$$

$$\ell_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Innen:

$$P(x) = f(a) \cdot \frac{x-b}{a-b} + f(b) \cdot \frac{x-a}{b-a}$$

2. megoldás: Osztott differenciák használata:

$$
\begin{array}{cccc}
j & x_j & f_j & \\
0 & a & \boxed{f(a)} & \\
 & & & \rangle \ \boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}} \\
1 & b & f(b) &
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

ami megegyezik az előző eredménnyel (ellenőrizzük!).

3. Határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú polinomot, mely az $x_0 := 1$, $x_1 := 4$, $x_2 := 5$ helyeken rendre az $f_0 := 1$, $f_1 := 19$ ill. az $f_2 := 29$ értékeket veszi fel.

   Megoldás: A feladat az adatokra illeszkedő legfeljebb másodfokú Lagrange-interpolációs polinom előállítása. Használjunk osztott differenciákat (de ajánlatos végigszámolni a másik két módszerrel is a feladatot):

$$\begin{array}{ccccc}
j & x_j & f_j & & \\
0 & 1 & \boxed{1} & & \\
 & & & \rangle \ \frac{19-1}{4-1} = \boxed{6} & \\
1 & 4 & 19 & & \rangle \ \frac{10-6}{5-1} = \boxed{1} \\
 & & & \rangle \ \frac{29-19}{5-4} = 10 & \\
2 & 5 & 29 & &
\end{array}$$

   ahonnan

$$P(x) = 1 + 6 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (x - 1)(x - 4) = -1 + x + x^2$$

4. Határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú polinomot, mely az $x_0 := -1$, $x_1 := 1$, $x_2 := 2$ helyeken rendre az $f_0 := -1$, $f_1 := 1$ ill. az $f_2 := 3$ értékeket veszi fel.

   Megoldás: A feladat az adatokra illeszkedő legfeljebb másodfokú Lagrange-interpolációs polinom előállítása. Használjunk osztott differenciákat (de ajánlatos végigszámolni a másik két módszerrel is a fel-

adatot):

$$
\begin{array}{lll}
j & x_j & f_j \\
0 & -1 & \boxed{-1} \\
 & & \rangle \ \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = \boxed{1} \\
1 & 1 & 1 \qquad \rangle \ \frac{2-1}{2-(-1)} = \boxed{\frac{1}{3}} \\
 & & \rangle \ \frac{3-1}{2-1} = 2 \\
2 & 2 & 3
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(x) = -1 + 1 \cdot (x+1) + \frac{1}{3} \cdot (x+1)(x-1) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}.$$

5. Határozzuk meg azt a legfeljebb harmadfokú polinomot, mely az $x_0 := -2$, $x_1 := 0$, $x_2 := 1$, $x_3 := 3$ helyeken rendre az $f_0 := -15$, $f_1 := -1$, $f_2 := 3$ ill. az $f_3 := 80$ értékeket veszi fel.

   Megoldás: A feladat az adatokra illeszkedő legfeljebb harmadfokú Lagrange-interpolációs polinom előállítása. Használjunk osztott differenciákat (de ajánlatos végigszámolni a másik két módszerrel is a feladatot):

$$
\begin{array}{lll}
j & x_j & f_j \\
0 & -2 & \boxed{-15} \\
 & & \rangle \ \frac{-1+15}{2} = \boxed{7} \\
1 & 0 & -1 \qquad \rangle \ \frac{4-7}{3} = \boxed{-1} \\
 & & \rangle \ \frac{3+1}{1} = 4 \qquad \rangle \ \frac{11.5+1}{5} = \boxed{2.5} \\
2 & 1 & 3 \qquad \rangle \ \frac{38.5-4}{3} = 11.5 \\
 & & \rangle \ \frac{80-3}{2} = 38.5 \\
3 & 3 & 80
\end{array}
$$

   ahonnan

$$P(x) = -15+7\cdot(x+2)-1\cdot(x+2)x+2.5\cdot(x+2)x(x-1) = 2.5x^3+1.5x^2-1.$$

6. Határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú polinomot, mely a gyökfüggvénnyel megegyező értékeket vesz fel az $x_0 := 1$, $x_1 := 4$, $x_2 := 9$ helyeken.

Megoldás: A feladat az adatokra illeszkedő legfeljebb másodfokú Lagrange-interpolációs polinom előállítása. Az alappontokhoz rendelt értékek: $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ ill. az $f_2 = 3$. Használjunk osztott differenciákat:

$$
\begin{array}{ccccc}
j & x_j & f_j & & \\
0 & 1 & \boxed{1} & & \\
 & & & \rangle \ \frac{2-1}{4-1} = \boxed{\frac{1}{3}} & \\
1 & 4 & 2 & & \rangle \ \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{9-1} = \boxed{-\frac{1}{60}} \\
 & & & \rangle \ \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5} & \\
2 & 9 & 3 & &
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(x) = 1 + \frac{1}{3} \cdot (x-1) - \frac{1}{60} \cdot (x-1)(x-4) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}.$$

2. megoldás: Keressük az interpolációs polinomot

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

alakban. Az egyelőre ismeretlen a_0, a_1, a_2 együtthatók a $P(x_k) = f_k$ $(k = 0, 1, 2)$ interpolációs egyenlőségekből határozhatók meg. Jelen esetben ez az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 9 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a_0 = \frac{3}{5}$, $a_1 = \frac{5}{12}$, $a_2 = -\frac{1}{60}$ (ellenőrizzük!), így az interpolációs polinom:

$$P(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}.$$

7. Igazoljuk, hogy az N-edfokú ($N \geq 0$) Lagrange-alappolinomokra teljesül, hogy

$$\ell_0(x) + \ell_1(x) + \ell_2(x) + ... + \ell_N(x) \equiv 1.$$

Megoldás: Az $f(x) := 1$ formulával definiált függvény Lagrange-interpolációs polinomja nyilván önmaga, ezért

$$1 \equiv P(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + ... + f(x_N)\ell_N(x) =$$

$$= \ell_0(x) + \ell_1(x) + ... + \ell_N(x).$$

8. Igazoljuk, hogy az N-edfokú ($N \geq 1$) Lagrange-alappolinomokra teljesül, hogy

$$x_0 \cdot \ell_0(x) + x_1 \cdot \ell_1(x) + ... + x_N \cdot \ell_N(x) \equiv x.$$

Megoldás: Az $f(x) := x$ formulával definiált függvény Lagrange-interpolációs polinomja nyilván önmaga, ezért

$$x \equiv P(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + ... + f(x_N)\ell_N(x) =$$

$$= x_0 \cdot \ell_0(x) + x_1 \cdot \ell_1(x) + ... + x_N \cdot \ell_N(x).$$

9. Írjunk MATLAB-programot az $x_0 := -5$, $x_1 := -4$, $x_2 := -3$, ... , $x_{10} := 5$ pontokban az $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ formulával definiált függvény értékeit interpoláló polinom előállítására (Runge-példa). Jelenítsük meg az eredményt! (Tanulság: a magasabb fokszámú Lagrange-interpolációs polinom az alappontok közt nagyon szélsőséges értékeket is felvehet.) Hasonlítsuk össze a jelenséget az $f(x) := e^x$ formulával értelmezett függvény esetével.

10. Közelítsük az $x^3 + x - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyökét inverz interpolációval.

Megoldás: Az egyenletnek van gyöke a $[0, 1]$ intervallumban, mert az $f(x) := x^3 + x - 1$ formulával definiált függvényre $f(0) = -1$ és $f(1) = 1$ teljesül.

Számítsuk ki f értékét ezen intervallum három pontjában, pl. az $x_0 := 0$, $x_1 := 0.5$, $x_2 := 1$ helyeken: $f_0 = -1$, $f_1 = -0.375$, $f_2 = 1$, és végezzünk inverz interpolációt, azaz interpoláljuk x-et f függvényében. Használjunk osztott differenciákat:

$$
\begin{array}{llll}
j & f_j & x_j & \\
0 & -1 & \boxed{0} & \\
 & & & \rangle \quad \frac{0.5}{0.625} = \boxed{0.8} \\
1 & -0.375 & 0.5 & \qquad\qquad \rangle \quad \frac{0.3636-0.8}{2} = \boxed{-0.2182} \\
 & & & \rangle \quad \frac{1-0.5}{1.375} = 0.3636 \\
2 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(f) = 0 + 0.8 \cdot (f+1) - 0.2182 \cdot (f+1)(f+0.375).$$

A gyök közelítő értéke az inverz függvény helyettesítési értéke a 0-ban, azaz $P(0)$:

$$P(0) = 0.8 - 0.2182 \cdot 0.375 = 0.7182.$$

Megjegyzés: A gyök (4 tizedesjegyre kerekített) értéke 0.6823. A fenti közelítés hibája tehát kb. 5.2%.

11. Közelítsük az $x^3 + x - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyökét inverz interpolációval, az előző feladatban mutatottnál pontosabban.

Megoldás: A javítás lényege, hogy most több alappontot alkalmazunk. Legyen ismét $f(x) := x^3 + x - 1 = 0$. Számítsuk ki f értékét a gyököt tartalmazó $[0, 1]$ intervallum négy pontjában: legyenek pl. $x_0 := 0$, $x_1 := 0.4$, $x_2 := 0.8$, $x_3 := 1$, akkor a helyettesítési értékek: $f_0 = -1$, $f_1 = -0.536$, $f_2 = 0.312$, $f_3 = 1$. Végezzünk inverz interpolációt, azaz

interpoláljuk x-et f függvényében. Használjunk osztott differenciákat:

$$
\begin{array}{llllll}
j & f_j & x_j & & & \\
0 & -1 & \boxed{0} & & & \\
 & & & \rangle\ \frac{0.4}{0.464} = \boxed{0.8621} & & \\
1 & -0.536 & 0.4 & & \rangle\ \frac{-0.3904}{1.312} = \boxed{-0.2976} & \\
 & & & \rangle\ \frac{0.4}{0.848} = 0.4717 & & \rangle\ \frac{0.1798}{2} = \boxed{0.0899} \\
2 & 0.312 & 0.8 & & \rangle\ \frac{-0.1810}{1.536} = -0.1178 & \\
 & & & \rangle\ \frac{0.2}{0.688} = 0.2907 & & \\
3 & 1 & 1 & & &
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(f) = 0 + 0.8621 \cdot (f+1) - 0.2976 \cdot (f+1)(f+0.536) +$$
$$+0.0899 \cdot (f+1)(f+0.536)(f-0.312).$$

A gyök közelítő értéke az inverz függvény helyettesítési értéke a 0-ban, azaz $P(0)$:

$$P(0) = 0.8621 - 0.2976 \cdot 0.536 - 0.0899 \cdot 0.536 \cdot 0.312 = 0.6875.$$

Megjegyzés: A gyök (4 tizedesjegyre kerekített) értéke 0.6823. A fenti közelítés hibája tehát kb. 0.76% (vö. az előző feladat eredményével).

12. Közelítsük az $x = e^{-x}$ egyenlet pozitív gyökét inverz interpolációval.

Megoldás: Az egyenletnek van gyöke a $[0, 1]$ intervallumban, mert az $f(x) := x - e^{-x}$ formulával definiált függvényre $f(0) = -1$ és $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ teljesül.

Számítsuk ki f értékét ezen intervallum három pontjában, pl. az $x_0 := 0$, $x_1 := 0.5$, $x_2 := 1$ helyeken: $f_0 = -1$, $f_1 = -0.1065$, $f_2 = 0.6321$, és végezzünk inverz interpolációt, azaz interpoláljuk x-et f függvényében. Használjunk osztott differenciákat:

$$
\begin{array}{llllll}
j & f_j & x_j & & & \\
0 & -1 & \boxed{0} & & & \\
 & & & \rangle\ \frac{0.5}{0.8935} = \boxed{0.5596} & & \\
1 & -0.1065 & 0.5 & & \rangle\ \frac{0.1174}{1.6321} = \boxed{0.0719} & \\
 & & & \rangle\ \frac{0.5}{0.7386} = 0.6770 & & \\
2 & 0.6321 & 1 & & &
\end{array}
$$

ahonnan

$$P(f) = 0 + 0.5596 \cdot (f+1) + 0.0719 \cdot (f+1)(f+0.1065).$$

A gyök közelítő értéke az inverz függvény helyettesítési értéke a 0-ban, azaz $P(0)$:

$$P(0) = 0.5596 + 0.0719 \cdot 0.1065 = 0.5673.$$

Megjegyzés: A gyök fixpont-iterációval nehézség nélkül számítható (végezzük el MATLAB-ban!). A gyök (4 tizedesjegyre kerekített) értéke 0.5671. A fenti közelítés hibája tehát kb. 0.0003%, igen jó.

13. Közelítsük $f(x) := \cos x$ formulával értelmezett függvényt a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon kétpontos Hermite-interpolációs polinommal.

Megoldás: Jelölje $x_0 := 0$, $x_1 := \frac{\pi}{2}$ (interpolációs alappontok). A végpontokban a függvényértékek és a deriváltértékek: $f_0 = f(x_0) = 1$, $f_1 = f(x_1) = 0$, $f_0' = f'(x_0) = 0$, $f_1' = f'(x_1) = -1$.

A kétpontos, harmadfokú Hermite-interpolációs polinom:

$$H(x) = A + B \cdot \frac{x - x_0}{h} + C \cdot \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D \cdot \frac{(x-x_0)^3}{h^3},$$

ahol $h := x_1 - x_0$. Az A, B, C, D együtthatók értéke a konkrét adatokkal:

$$\begin{array}{lrrrrl}
A = & f_0 & & & & = 1 \\
B = & & & hf_0' & & = 0 \\
C = & -3f_0 & +3f_1 & -2hf_0' & -hf_1' & = -3 + h \\
D = & 2f_0 & -2f_1 & +hf_0' & +hf_1' & = 2 - h
\end{array}$$

ahonnan:

$$H(x) = 1 + \frac{-3+h}{h^2} \cdot x^2 + \frac{2-h}{h^3} \cdot x^3 =$$
$$= 1 - 0.57923x^2 + 0.11074x^3.$$

Megjegyzés: Érdemes MATLAB-ban megjeleníteni egy ábrán az eredeti függvényt és az Hermite-interpolációs függvényt is.

14. Közelítsük $f(x) := \cos x$ formulával értelmezett függvényt a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon kétpontos Hermite-interpolációs polinommal.

Megoldás: Jelölje $x_0 := -\frac{\pi}{2}$, $x_1 := \frac{\pi}{2}$ (interpolációs alappontok). A végpontokban a függvényértékek és a deriváltértékek: $f_0 = f(x_0) = 0$, $f_1 = f(x_1) = 0$, $f_0' = f'(x_0) = 1$, $f_1' = f'(x_1) = -1$.

A kétpontos, harmadfokú Hermite-interpolációs polinom:

$$H(x) = A + B \cdot \frac{x - x_0}{h} + C \cdot \frac{(x - x_0)^2}{h^2} + D \cdot \frac{(x - x_0)^3}{h^3},$$

ahol $h := x_1 - x_0 = \pi$. Az A, B, C, D együtthatók értéke a konkrét adatokkal:

$$\begin{array}{lrrrrl} A = & f_0 & & & & = 0 \\ B = & & & hf_0' & & = h \\ C = & -3f_0 & +3f_1 & -2hf_0' & -hf_1' & = -h \\ D = & 2f_0 & -2f_1 & +hf_0' & +hf_1' & = 0 \end{array}$$

ahonnan:

$$H(x) = \left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{h} \cdot \left(x + \frac{h}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{\pi}$$

Megjegyzés: Érdemes MATLAB-ban megjeleníteni egy ábrán az eredeti függvényt és az Hermite-interpolációs függvényt is.

15. Közelítsük $f(x) := \cos x$ formulával értelmezett függvényt az $x_0 := -\frac{\pi}{2}$, $x_1 := 0$, $x_2 := \frac{\pi}{2}$ alappontokon harmadfokú spline függvénnyel. (A végpontokban a deriváltértékek egyezzenek meg a fenti függvény deriváltjaival.)

Megoldás: Az interpolációs alappontokban a függvényértékek és a deriváltértékek: $f_0 = f(x_0) = 0$, $f_1 = f(x_1) = 1$, $f_2 = f(x_2) = 0$, $f_0' = f'(x_0) = 1$, f_1' ismeretlen, $f_2' = f'(x_2) = -1$.

Az ismeretlen f_1' deriváltértékre felírható egyenlet (ahol $h = \frac{\pi}{2}$):

$$f_0' + 4f_1' + f_2' = \frac{-3f_0 + 3f_2}{h} = 0,$$

ahonnan $f_1' = 0$. Innen a spline függvény az $[x_0, x_1]$ és az $[x_1, x_2]$ intervallumokban már egy-egy kétpontos Hermite-interpolációval határozható meg, az előző feladatok mintájára.

Eredmény: az $[x_0, x_1]$ intervallumon:

$$H_0(x) = (x+h) + \frac{3-2h}{h^2} \cdot (x+h)^2 + \frac{-2+h}{h^3} \cdot (x+h)^3$$

Az $[x_1, x_2]$ intervallumon pedig:

$$H_1(x) = 1 + \frac{-3+h}{h^2} \cdot x^2 + \frac{2-h}{h^3} \cdot x^3$$

Megjegyzés: Érdemes MATLAB-ban megjeleníteni egy ábrán az eredeti függvényt és a spline interpolációs függvényt is.

16. Közelítsük $f(x) := \cos 2x$ formulával értelmezett függvényt a $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon kétpontos Hermite-interpolációs polinommal.

Megoldás: Jelölje $x_0 := -\frac{\pi}{4}$, $x_1 := \frac{\pi}{4}$ (interpolációs alappontok). A végpontokban a függvényértékek és a deriváltértékek: $f_0 = f(x_0) = 0$, $f_1 = f(x_1) = 0$, $f_0' = f'(x_0) = 2$, $f_1' = f'(x_1) = -2$.

A kétpontos, harmadfokú Hermite-interpolációs polinom:

$$H(x) = A + B \cdot \frac{x - x_0}{h} + C \cdot \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D \cdot \frac{(x-x_0)^3}{h^3},$$

ahol $h := x_1 - x_0 = \frac{\pi}{2}$. Az A, B, C, D együtthatók értéke a konkrét adatokkal:

$$\begin{array}{lrrrrl}
A = & f_0 & & & & = 0 \\
B = & & & hf_0' & & = \pi \\
C = & -3f_0 & +3f_1 & -2hf_0' & -hf_1' & = -\pi \\
D = & 2f_0 & -2f_1 & +hf_0' & +hf_1' & = 0
\end{array}$$

ahonnan:

$$H(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\pi} \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

Megjegyzés: Érdemes MATLAB-ban megjeleníteni egy ábrán az eredeti függvényt és az Hermite-interpolációs függvényt is.

17. Közelítsük $f(x) := \cos 2x$ formulával értelmezett függvényt az $x_0 := -\frac{\pi}{4}$, $x_1 := 0$, $x_2 := \frac{\pi}{4}$ alappontokon harmadfokú spline függvénnyel. (A végpontokban a deriváltértékek egyezzenek meg a fenti függvény deriváltjaival.)

Megoldás: Az interpolációs alappontokban a függvényértékek és a deriváltértékek: $f_0 = f(x_0) = 0$, $f_1 = f(x_1) = 1$, $f_2 = f(x_2) = 0$, $f_0' = f'(x_0) = 2$, f_1' ismeretlen, $f_2' = f'(x_2) = -2$.

Az ismeretlen f_1' deriváltértékre felírható egyenlet (ahol $h = \frac{\pi}{4}$):

$$f_0' + 4f_1' + f_2' = \frac{-3f_0 + 3f_2}{h} = 0,$$

ahonnan $f_1' = 0$. Innen a spline függvény az $[x_0, x_1]$ és az $[x_1, x_2]$ intervallumokban már egy-egy kétpontos Hermite-interpolációval határozható meg, az előző feladatok mintájára.

Megjegyzés: Érdemes MATLAB-ban megjeleníteni egy ábrán az eredeti függvényt és a spline interpolációs függvényt is.

18. Közelítsük $f(x) := \cos 2x$ formulával értelmezett függvényt az $x_0 := -\frac{\pi}{4}$, $x_1 := -\frac{\pi}{12}$, $x_2 := \frac{\pi}{12}$, $x_3 := \frac{\pi}{4}$ alappontokon harmadfokú spline függvénnyel. (A végpontokban a deriváltértékek egyezzenek meg a fenti függvény deriváltjaival.)

Megoldás: Az interpolációs alappontokban a függvényértékek és a deriváltértékek: $f_0 = f(x_0) = 0$, $f_1 = f(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_2 = f(x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_3 = f(x_3) = 0$, $f_0' = f'(x_0) = 2$, f_1' ismeretlen, f_2' ismeretlen, $f_3' = f'(x_3) = -2$.

Az ismeretlen f_1', f_2' deriváltértékre felírható egyenletrendszer (ahol $h = \frac{\pi}{6}$):

$$f_0' + 4f_1' + f_2' = \frac{-3f_0 + 3f_2}{h}$$

$$f_1' + 4f_2' + f_3' = \frac{-3f_1 + 3f_3}{h}$$

ahonnan $f_1' = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - \frac{2}{3}$, és $f_2' = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3}$. Innen a spline függvény az $[x_0, x_1]$, az $[x_1, x_2]$ és az $[x_2, x_3]$ intervallumokban már egy-egy

kétpontos Hermite-interpolációval határozható meg, az előző feladatok mintájára.

Megjegyzés: Érdemes MATLAB-ban megjeleníteni egy ábrán az eredeti függvényt és a spline interpolációs függvényt is.

14 Nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek megoldása

1. (Négyzetgyökvonás Newton-módszerrel). Legyen $A := 9$. Milyen függvény gyökhelyének előállítására szolgál az alábbi Newton-iterációs sorozat?

   Legyen $x_0 > 0$ tetszőleges, és:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$$

   Megoldás: A keresett függvény formulája: $f(x) := x^2 - A$, ekkor ui. $f'(x) = 2x$, így a Newton-sorozat:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$$

   Ha tehát a sorozat konvergens, akkor $\sqrt{A} = 3$-hoz tart.

   Megjegyzés: Ha $x_0 \geq 3$, akkor teljesülnek a monoton konvergenciatétel feltételei: x_0 és 3 közt f' és f'' sehol sem 0, továbbá $f(x_0)$ és $f''(x_0)$ azonos előjelű (éspedig pozitív). Így (x_n) biztosan konvergens, 3-hoz tart éspedig monoton fogyó módon. Próbáljuk ki MATLAB-ban a sorozatot egészen nagy, pl. $x_0 := 1000$ kezdőértékről indítani. A sorozat monoton fogy, mérsékelt konvergenciasebességgel; a megoldás környékén viszont begyorsul, és kvadratikus konvergencia tapasztalható.

2. (Köbgyökvonás Newton-módszerrel). Legyen $A > 1$. írjuk fel az $f(x) := x^3 - A$ $(x > 0)$ függvény zérushelyének meghatározására szolgáló Newton-iterációs sorozatot. Milyen kezdőérték mellett konvergens?

   Megoldás: A Newton-iterációs sorozat:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - A}{3x_n^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(2x_n + \frac{A}{x_n^2} \right)$$

   Ha tehát a sorozat konvergens, akkor $\sqrt[3]{A}$-hoz tart.

Megjegyzés: Ha $x_0 \geq \sqrt[3]{A}$, akkor teljesülnek a monoton konvergenciatétel feltételei: x_0 és $\sqrt[3]{A}$ közt f' és f'' sehol sem 0, továbbá $f(x_0)$ és $f''(x_0)$ azonos előjelű (éspedig pozitív). Így (x_n) biztosan konvergens, $\sqrt[3]{A}$-hoz tart éspedig monoton fogyó módon. Megjegyezzük, hogy a konvergencia akkor is teljesül, hs $x_0 < \sqrt[3]{A}$, csak akkor már nem monoton módon.

3. Oldjuk meg a

$$\sin x - 3x + 1 = 0$$

egyenletet fixponttétellel és Newton-módszerrel is.

Megoldás: Az egyenletet így célszerű fixpont-formára hozni:

$$x = \frac{\sin x + 1}{3},$$

mert ekkor a jobb oldal mint x függvénye az egész $\mathbf{R}$-en kontrakció, mivel deriváltjának abszolút értéke legfeljebb $\frac{1}{3}$. Így bármely valós x_0 kezdőértékből indítva az

$$x_{n+1} := \frac{\sin x_n + 1}{3}$$

fixpont-iterációs sorozatot, az konvergens lesz és a fixponthoz tart. Ez 4 tizedesjegy pontossággal: 0.4903 (ellenőrizzük!)

A Newton-iterációs sorozat:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\sin x_n - 3x_n + 1}{\cos x_n - 3}$$

4. Keressük meg az

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

egyenlet 1 és 2 közé eső gyökét intervallumfelezéssel, fixponttétellel és Newton-módszerrel is.

Megoldás: 1 és 2 közt valóban van győk, mert a bal oldal mint x függvénye az $x = 1$ helyen negatív, míg az $x = 2$ helyen pozitív értéket vesz fel. MATLAB-programot írva az intervallumfelezésre (tegyük

meg!) a szükséges lépések száma jól kézbentartható, mert az intervallum mindig feleződik. Így pl. a 0.0001-hez kisebb hibához biztosan elegendő lépések számára $\frac{1}{2^n} \leq 0.0001$ teljesül, ahonnan $n \geq 13.288$, azaz 14 lépés már biztosan elegendő. A gyök 4 tizedesjegy pontossággal: 1.3688.

A fixpont-problébára való visszavezetés többféleképp is végrehajtható:

$$x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10},$$

vagy

$$x = \frac{20 - x^3 - 2x^2}{10},$$

de ez utóbbi esetben a fixpont-iteráció nem konvergens (miért?).

Viszont az első esetben a fixpont-iteráció bármely $1 \leq x_0 \leq 2$ esetben konvergens (miért?).

A Newton-iterációs sorozat:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$$

Az iterációt bármely, a gyöknél nagyobb x_0 kezdőértékből indíthatjuk, mert f' és f'' minden $x > 0$ esetén pozitív. Továbbá ekkor $f(x_0)$ és $f''(x_0)$ előjele megegyezik, mégpedig mindkettő pozitív. Teljesülnek tehát a monoton konvergencia feltételei, így a sozozat monoton fogyó módon tart a gyökhöz.

5. Az

$$f(x) := x^3 = 0$$

egyenlet egyetlen gyöke nyilván $x = 0$. Tetszőleges, $x_0 \neq 0$ kezdőértékből kiindulva, a Newton-iterációs sorozatra:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n$$

teljesül. Ezért

$$x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n x_0$$

ami pedig *nem* kvadratikus sebességgel tart a gyökhöz, azaz 0-hoz. Ez ellentmondani látszik a kvadratikus konvetrgenciatételnek. Oldjuk fel ez az ellentmondást.

Megoldás: Jelölje $x^* := 0$ az egyetlen gyököt. A kvadratikus konvergencia feltételei közt szerepel, hogy $f'(x^*)$-nek különböznie kell 0-tól. Ezetünkben pedig épp ez nem teljesül, mert $f'(x) = 3x^2$.

6. Adott egy $A > 0$ szám. Számítsuk ki $\frac{1}{A}$-t osztás nélkül!

Megoldás: A probléma: olyan függvényt találni, melynek zérushelye épp $\frac{1}{A}$, továbbá a Newton-iteráció algoritmusa ne tartalmazzon osztást.

Próbálkozzunk először az $f(x) := Ax - 1$ képlettel adott függvénnyel. A zérushely ugyan valóban $\frac{1}{A}$, de a Newton-iteráció tartalmaz osztást:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{Ax_n - 1}{A} = \frac{1}{A}$$

Legyen most $f(x) := \frac{1}{x} - A$. Akkor $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, és a Newton-iteráció:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - A}{-\frac{1}{x_n^2}} = \frac{1}{A} = x_n + x_n - Ax_n^2 = x_n \cdot (2 - Ax_n)$$

Az algoritmus nem tartalmaz osztást, és minden $0 < x_0 < \frac{1}{A}$ esetén konvergens és $\frac{1}{A}$-hoz tart (ellenőrizzük a monoton konvergencia feltételeinek meglétét!).

7. Írjuk fel a

$$f_1(x, y) := x^2 + y^2 - 2 = 0$$
$$f_2(x, y) := x^2 - y^2 = 0$$

egyenletrendszerre a kétváltozós Newton-módszert.

Megoldás: Az $(f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ leképezés derivált lineáris leképezése (Jacobi-mátrixa):

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Innen a Newton-iterációs sorozat:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - (J(x_n, y_n))^{-1} \begin{pmatrix} x_n^2 + y_n^2 - 2 \\ x_n^2 - y_n^2 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Írjunk rá programot MATLAB-ban, és próbáljuk meghatározni az összes gyököt!

8. Írjuk fel a

$$f_1(x,y) := x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$
$$f_2(x,y) := xy^2 + x - 10y + 8 = 0$$

egyenletrendszerre a kétváltozós Newton-módszert.

Megoldás: Az $(f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ leképezés derivált lineáris leképezése (Jacobi-mátrixa):

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 10 & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy - 10 \end{pmatrix}$$

Innen a Newton-iterációs sorozat:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - (J(x_n, y_n))^{-1} \begin{pmatrix} x_n^2 - 10x_n + y_n^2 + 8 \\ x_n y_n^2 + x_n - 10y_n + 8 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Írjunk rá programot MATLAB-ban, és próbáljuk meghatározni az összes gyököt!

15 Deriváltak és parciális deriváltak közelítése differenciasémákkal

1. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ háromszor folytonosan differenciálható. Legyenek $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $h := x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, és jelölje $f_0 := f(x_0)$, $f_1 := f(x_1)$, $f_2 := f(x_2)$. Hányadrendben közelíti az $f'(x_0)$ deriváltat az

$$\frac{f_2 - f_0}{2h}$$

hányados? Hát az $f'(x_1)$ deriváltat?

Megoldás: Fejtsük f-et x_0 körül véges Taylor-sorba:

$$f_2 = f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 2h + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot 4h^2$$

ahonnan:

$$\left| \frac{f_2 - f_0}{2h} - f'(x_0) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2!} \cdot 2h \leq ||f''||_{\max} \cdot h$$

Tehát a közelítés h-ban elsőrendű.

Az $f'(x_1)$ derivált vizsgálatakor x_1 körül fejtsük f-et véges Taylor-sorba, de most több tagot vegyünk figyelembe:

$$f_2 = f_1 + \frac{f'(x_1)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_1)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot h^3$$

$$f_0 = f_1 - \frac{f'(x_1)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_1)}{2!} \cdot h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!} \cdot h^3$$

A két egyenlőséget kivonva kapjuk, hogy

$$\left| \frac{f_2 - f_0}{2h} - f'(x_1) \right| = \left| \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{3!} \right| \cdot \frac{h^3}{2h} \leq \frac{||f'''||_{\max}}{6} \cdot h^2$$

Tehát ugyanaz a különbségi hányados az $f'(x_1)$ deriváltat h szerint másodrendben közelíti.

2. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ háromszor folytonosan differenciálható. Legyenek $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $h := x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, és jelölje $f_0 := f(x_0)$, $f_1 := f(x_1)$, $f_2 := f(x_2)$. Konstruáljunk egy, az $f'(x_0)$ deriváltat h szerint

másodrendben közelítő differenciasémát az f_0, f_1, f_2 függvényértékekből.

Megoldás: Fejtsük f-et x_0 körül véges Taylor-sorba:

$$f_1 = f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot h^3$$

$$f_2 = f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 2h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 4h^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!} \cdot 8h^3$$

Az első egyenlet 4-szereséből kivonva a másodikat, a másodrendű deriváltat tartalmazó tagok kiesnek, és azt kapjuk, hogy

$$4f_1 - f_2 = 3f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 2h + \frac{4f'''(\xi) - 8f'''(\eta)}{3!} \cdot h^3$$

Innen:

$$\left| \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} - f'(x_0) \right| \leq ||f'''||_{\max} \cdot h^2$$

A séma tehát:

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

és ez az $f'(x_0)$ deriváltat h szerint valóban másodrendben közelíti.

3. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható. Legyenek $x_0 \in \mathbf{R}$, h adott, és $x_k := x_0 + k \cdot h$, $k = -2, -1, 1, 2$-re. Jelölje $f_k := f(x_k)$ $(k = -2, -1, 0, 1, 2)$.

   Milyen deriváltat közelít az alábbi hányados, és hányadrendben?

$$\frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2}{12h}$$

Megoldás: Fejtsük f-et x_0 körül véges Taylor-sorba:

$$f_1 = f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!} \cdot h^4 + \frac{f^{V}(\xi_1)}{5!} \cdot h^5$$

$$f_{-1} = f_0 - \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!} \cdot h^4 - \frac{f^{V}(\xi_{-1})}{5!} \cdot h^5$$

Innen

$$f_1 - f_{-1} = \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 2h + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 2h^3 + \frac{f^{V}(\xi_1) + f^{V}(\xi_{-1})}{5!} \cdot h^5$$

Hasonlóan (h helyett $2h$-t szerepeltetve):

$$f_2 - f_{-2} = \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 4h + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 16h^3 + \frac{32f^V(\xi_2) + 32f^V(\xi_{-2})}{5!} \cdot h^5$$

Ezt kivonva az előző egyenlet 8-szorosából, a harmadrendű deriváltat tartalmazó tagok kiesnek:

$$f_{-2} - f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} = f'(x_0) \cdot 12h +$$

$$+ \frac{8f^V(\xi_1) + 8f^V(\xi_{-1}) - 32f^V(\xi_2) - 32f^V(\xi_{-2})}{5!} \cdot h^5$$

Innen

$$\left| \frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2}{12h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{80 \cdot ||f^V||_{\max}}{12 \cdot 5!} \cdot h^4 = \frac{||f^V||_{\max}}{18} \cdot h^4$$

A formula tehát az $f'(x_0)$ deriváltat közelíti, h szerint negyedrendben.

4. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható. Legyenek $x_0 \in \mathbf{R}$, h adott, és $x_{-1} := x_0 - h$, $x_1 := x_0 + 2h$. Jelölje $f_0 := f(x_0)$, $f_{-1} := f(x_{-1})$, $f_1 := f(x_1)$. Konstruáljunk az $f''(x_0)$ deriváltat közelítő sémát az f_{-1}, f_0, f_1 függvényértékekből. Hányadrendű közelítés érhető el (h szerint)?

Megoldás: Fejtsük f-et x_0 körül véges Taylor-sorba:

$$f_1 = f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 2h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 4h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 8h^3$$

$$f_{-1} = f_0 - \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!} \cdot h^3$$

A első egyenlethez a második kétszeresét hozzáadva, az $f'(x_0)$-t tartalmazó tagok kiesnek, innen:

$$f_1 + 2f_{-1} = 3f_0 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 6h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 8h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!} \cdot 2h^3$$

Innen

$$\left| \frac{2f_{-1} - 3f_0 + f_1}{3h^2} - f''(x_0) \right| \leq \frac{10h^3 \cdot ||f'''||_{\max}}{3! \cdot 3h^2} = \frac{5 \cdot ||f'''||_{\max}}{9} \cdot h$$

A séma tehát:

$$\frac{2f_{-1} - 3f_0 + f_1}{3h^2},$$

és ez az $f''(x_0)$ deriváltat h szerint elsőrendben közelíti. (A közelítés rendje nem javul, ha a Taylor sorfejtést több tagra végezzük el – próbáljuk ki!)

5. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható. Legyenek $x_0 \in \mathbf{R}$, h adott, és $x_k := x_0 + k \cdot h$, $k = -2, -1, 1, 2$-re. Jelölje $f_k := f(x_k)$ $(k = -2, -1, 0, 1, 2)$. Konstruáljunk az $f'''(x_0)$ deriváltat közelítő sémát az f_k $(k = -2, -1, 0, 1, 2)$, függvényértékekből. Hányadrendű közelítés érhető el (h szerint)?

Megoldás: Fejtsük f-et x_0 körül véges Taylor-sorba:

$$f_1 = f_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!} \cdot h^4 + \frac{f^{V}(\xi_1)}{5!} \cdot h^5$$

$$f_{-1} = f_0 - \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!} \cdot h^4 - \frac{f^{V}(\xi_{-1})}{5!} \cdot h^5$$

Innen

$$f_1 - f_{-1} = \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 2h + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 2h^3 + \frac{f^{V}(\xi_1) + f^{V}(\xi_{-1})}{5!} \cdot h^5$$

Hasonlóan (h helyett $2h$-t szerepeltetve):

$$f_2 - f_{-2} = \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 4h + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 16h^3 + \frac{32f^{V}(\xi_2) + 32f^{V}(\xi_{-2})}{5!} \cdot h^5$$

Ebből kivonva az előző egyenlet 2-szeresét, az elsőrendű deriváltat tartalmazó tagok kiesnek:

$$f_2 - f_{-2} - 2f_1 + 2f_{-1} = f'''(x_0) \cdot 2h^3 +$$
$$+ \frac{32f^{V}(\xi_2) + 32f^{V}(\xi_{-2}) - 2f^{V}(\xi_1) - 2f^{V}(\xi_{-1})}{5!} \cdot h^5$$

Innen

$$\left| \frac{-f_{-2} + 2f_{-1} - 2f_1 + f_2}{2h^3} - f'''(x_0) \right| \leq \frac{68h^5 \cdot ||f^{V}||_{\max}}{2h^3 \cdot 5!} =$$
$$= \frac{17 \cdot ||f^{V}||_{\max}}{60} \cdot h^2$$

A formula tehát az $f'''(x_0)$ deriváltat közelíti, h szerint másodrendben.

6. Legyen $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ elegendően sima függvény. Egy $C \in \mathbf{R}^2$ centrális pont és adott h lépésköz mellett tekintsük az $NE := C+(h,h)$, $NW := C+(-h,h)$, $SW := C+(-h,-h)$, $SE := C+(h,-h)$ pontokat. Jelölje $u_C := u(C)$, $u_{NE} := u(NE)$, és így tovább. Konstruáljunk sémát a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ Laplace-operátor közelítésére. Hányadrendű a közelítés (h szerint)?

Megoldás: Fejtsük u-et C körül véges *kétváltozós* Taylor-sorba:

$$u(C + (h,\delta)) = u_C + \frac{1}{1!} \cdot (u_x \cdot h + u_y \cdot \delta) +$$

$$+\frac{1}{2!} \cdot (u_{xx} \cdot h^2 + 2u_{xy} \cdot h\delta + u_{yy} \cdot \delta^2) +$$

$$+\frac{1}{3!} \cdot (u_{xxx} \cdot h^3 + 3u_{xxy} \cdot h^2\delta + 3u_{xyy} \cdot h\delta^2 + u_{yyy} \cdot \delta^3) + ...$$

Itt a rövidség kedvéért a C-ben vett parciális deriváltakat indexekkel jelöltük: $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}(C)$, $u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(C)$, ... Az alábbi táblázatban az u_{NE}, u_{NW}, u_{SW}, u_{SE} értékekre vonatkozó Taylor-sorokban a harmadrendű deriváltakig bezárólagosan a deriváltak együtthatóit foglaljuk össze (a magasabb rendű tagok adaléka egy-egy $\mathcal{O}(h^4)$ tagot eredményez):

	u_C	u_x	u_y	u_{xx}	u_{xy}	u_{yy}	u_{xxx}	u_{xxy}	u_{xyy}	u_{yyy}
u_{NE}	1	h	h	$\frac{h^2}{2}$	h^2	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^3}{6}$	$\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{6}$
u_{NW}	1	$-h$	h	$\frac{h^2}{2}$	$-h^2$	$\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$	$\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{6}$
u_{SW}	1	$-h$	$-h$	$\frac{h^2}{2}$	h^2	$\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$	$-\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$
u_{SE}	1	h	$-h$	$\frac{h^2}{2}$	$-h^2$	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^3}{6}$	$-\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$

Összeadva a négy sort, u_C-n és a tiszta másodrendű parciális deriváltakon hívül minden kiesik, innen:

$$\frac{u_{NE} + u_{NW} + u_{SW} + u_{SE} - 4u_C}{2h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(C) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(C) + \mathcal{O}(h^2) =$$

$$= \Delta u(C) + \mathcal{O}(h^2)$$

A közelítés h szerint másodrendű.

7. Legyen $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ elegendően sima függvény. Egy $C \in \mathbf{R}^2$ centrális pont és adott h lépésköz mellett tekintsük az $NE := C+(h,h)$, $NW := C + (-h,h)$, $SW := C + (-h,-h)$, $SE := C + (h,-h)$ pontokat. Jelölje $u_C := u(C)$, $u_{NE} := u(NE)$, és így tovább. Konstruáljunk sémát a $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ vegyes másodrendű derivált közelítésére. Hányadrendű a közelítés (h szerint)?

Megoldás: Fejtsük u-et C körül véges *kétváltozós* Taylor-sorba:

$$u(C + (h,\delta)) = u_C + \frac{1}{1!} \cdot (u_x \cdot h + u_y \cdot \delta) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot (u_{xx} \cdot h^2 + 2u_{xy} \cdot h\delta + u_{yy} \cdot \delta^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot (u_{xxx} \cdot h^3 + 3u_{xxy} \cdot h^2\delta + 3u_{xyy} \cdot h\delta^2 + u_{yyy} \cdot \delta^3) + ...$$

Itt a rövidség kedvéért a C-ben vett parciális deriváltakat indexekkel jelöltük: $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}(C)$, $u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(C)$, ... Az alábbi táblázatban az u_{NE}, $-u_{NW}$, u_{SW}, $-u_{SE}$ értékekre vonatkozó Taylor-sorokban a harmadrendű deriváltakig bezárólagosan a deriváltak együtthatóit foglaljuk össze (a magasabb rendű tagok adaléka egy-egy $\mathcal{O}(h^4)$ tagot eredményez):

	u_C	u_x	u_y	u_{xx}	u_{xy}	u_{yy}	u_{xxx}	u_{xxy}	u_{xyy}	u_{yyy}
u_{NE}	1	h	h	$\frac{h^2}{2}$	h^2	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^3}{6}$	$\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{6}$
$-u_{NW}$	-1	h	$-h$	$-\frac{h^2}{2}$	h^2	$-\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^3}{6}$	$-\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$
u_{SW}	1	$-h$	$-h$	$\frac{h^2}{2}$	h^2	$\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$	$-\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$
$-u_{SE}$	-1	$-h$	h	$-\frac{h^2}{2}$	h^2	$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{6}$	$\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$	$\frac{h^3}{6}$

Összeadva a négy sort, a vegyes másodrendű parciális deriváltakon hívül minden kiesik, innen:

$$\frac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE}}{4h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(C) + \mathcal{O}(h^2)$$

A közelítés h szerint másodrendű.