# Térgörbék

# Térgörbék megadása

**Egyenes** paraméteres vektoregyenlete:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{e}}$$

(**a**: az egyenes egy rögzített pontja, **e**: irányvektor)

**Térgörbe**: egy $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ folytonos függvény értékkészlete. Maga a függvény: a görbe egy *reprezentánsa* vagy *paraméterezése*.

*Példa (kör egyenlete)*

**e**, **f** egységnyi hosszúságú, egymásra merőleges vektorok

$$\mathbf{x}(t) := (R\cos t)\cdot \mathbf{e} + (R\sin t)\cdot \mathbf{f}$$

Ez egy *kör egyenlete* (az **e**, **f** vektorok síkjában). Egy másik paraméterezése:

$$\mathbf{x}(t) := (R\cos t^2)\cdot \mathbf{e} + (R\sin t^2)\cdot \mathbf{f}$$

## *Példa (nyolcasok)*

$$\mathbf{x}(t) := \sin t \cos t \cdot \mathbf{i} + |\sin t| \sin t \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{x}(t) := \frac{\sin t}{2} \cdot \mathbf{i} + \sin \frac{t}{2} \cdot \mathbf{j}$$

## *Példa (csavarvonal hengerpaláston)*

$$\mathbf{x}(t) := (R \cos t) \cdot \mathbf{i} + (R \sin t) \cdot \mathbf{j} + \frac{d \cdot t}{2\pi} \cdot \mathbf{k}$$

## *Példa (csavarvonal kúppaláston)*

$$\mathbf{x}(t) := R \cdot \left(1 - \frac{dt}{2\pi m}\right) \cos t \cdot \mathbf{i} + R \cdot \left(1 - \frac{dt}{2\pi m}\right) \cdot \mathbf{j} + \frac{d \cdot t}{2\pi} \cdot \mathbf{k}$$

*Példa (arkhimédeszi spirális)*

$$\mathbf{x}(t) := R_0 \frac{t}{2\pi n} \cdot (\cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j})$$

*Példa (logaritmikus spirális)*

$$\mathbf{x}(t) := R_0 e^{-ct} \cdot (\cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j})$$

*Példa (hiperbolikus spirális)*

$$\mathbf{x}(t) := R_0 \frac{c}{t} \cdot (\cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j})$$

# Görbület és torzió

Legyen $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ egy (elég sima) térgörbe.

**Érintővektor** a *t* helyen: $\mathbf{x}'(t)$.
**Érintőegyenes**: $\lambda \to \mathbf{x}(t) + \lambda \cdot \mathbf{x}'(t)$

**Görbület** a *t* helyen: $\boxed{\kappa(t) := \dfrac{\| \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) \|}{\| \mathbf{x}'(t) \|^3}}$

*Példa*: $\mathbf{x}(t) := (R\cos t)\cdot\mathbf{i} + (R\sin t)\cdot\mathbf{j}$ (kör), akkor

$$\mathbf{x}'(t) = -(R\sin t)\cdot\mathbf{i} + (R\cos t)\cdot\mathbf{j} \text{ és } \mathbf{x}''(t) = -(R\cos t)\cdot\mathbf{i} - (R\sin t)\cdot\mathbf{j}$$

$$\kappa(t) = R^2 \frac{\| \sin t\cos t\cdot\mathbf{i}\times\mathbf{i} + \sin^2 t\cdot\mathbf{i}\times\mathbf{j} - \cos^2 t\cdot\mathbf{j}\times\mathbf{i} + \sin t\cos t\cdot\mathbf{j}\times\mathbf{j}\|}{R^3} =$$

$$= R^2 \frac{\| (\sin^2 t + \cos^2 t)\cdot\mathbf{k}\|}{R^3} = \frac{1}{R}$$

A görbület jelentése: a „simulókör” sugarának reciproka.

**Görbületi sugár**: $\dfrac{1}{\kappa}$

*Példa*: $\mathbf{x}(t) := t \cdot \mathbf{i} + t^2 \cdot \mathbf{j}$ (parabola), akkor

$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{i} + 2t \cdot \mathbf{j}$ és $\mathbf{x}''(t) = 2\mathbf{j}$

$$\kappa(t) = \frac{\| (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) \times 2\mathbf{j} \|}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

A legnagyobb görbület a parabola csúcsában van, $\kappa(0) = 2$.

**Torzió** a *t* helyen: $\boxed{\tau(t) := \dfrac{(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \cdot \mathbf{x}'''(t)}{\| \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) \|^2}}$

*Példa*: $\mathbf{x}(t) := (R\cos t) \cdot \mathbf{i} + (R\sin t) \cdot \mathbf{j}$ (kör), akkor

$\mathbf{x}'(t) = -(R\sin t) \cdot \mathbf{i} + (R\cos t) \cdot \mathbf{j}$ , $\quad \mathbf{x}''(t) = -(R\cos t) \cdot \mathbf{i} - (R\sin t) \cdot \mathbf{j}$
$\mathbf{x}'''(t) = (R\sin t) \cdot \mathbf{i} - (R\cos t) \cdot \mathbf{j}$
akkor $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = R^2\mathbf{k}$, ezért $\tau(t) \equiv 0$.

Általában, ha $\mathbf{x}(t) = f(t)\mathbf{a} + g(t)\mathbf{b}$, azaz **x síkgörbe**, akkor torziója azonosan 0. A torzió azt „méri”, hogy mennyire tér el a görbe egy síkgörbétől.

# Kísérő triéder

A $t \to \mathbf{x}(t)$ görbe minden pontjához rendeljünk egy $\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$ egységnyi normájú vektorhármast a következőképp:

- $\mathbf{e}(t)$ mutasson érintőirányba;
- $\mathbf{f}(t)$ legyen $\mathbf{e}(t)$-re merőleges, éspedig az $\mathbf{x}'(t)$, $\mathbf{x}''(t)$ vektorok síkjába essék;
- $\mathbf{g}(t)$ legyen mindkettő előzőre merőleges.

Akkor $\mathbf{e}(t) = \dfrac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$, $\mathbf{g}(t) = \dfrac{\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}$, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t)$.

Az $\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$ vektorhármast a görbe **kísérő triéderének** nevezzük az $\mathbf{x}(t)$ pontban.

A térgörbe megjelenítésében a kísérő triéder segíthet.

*Példa*: legyen $t \to \mathbf{x}(t)$ egy görbe. Tekintsük az alábbi felületet:

$$\mathbf{F}(t,u) := \mathbf{x}(t) + R\mathbf{f}(t)\cos u + R\mathbf{g}(t)\sin u$$

Elég kicsi $R > 0$ mellett ez egy csőszerű felület, melynek tengelye az adott görbe. Ezt térben megjelenítve, a görbe térbeli lefutása szemléletesebb.

# Numerikus deriválás

Legyen $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ elég sima függvény, $a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b$ az $[a,b]$ intervallum egy ekvidisztáns felbontása, $h:=\dfrac{b-a}{N}$, $t_k:=t_0+kh$, $f_k:=f(t_k)\quad(k=0,1,\ldots,N)$

*Első derivált, előrelépő séma*:

$$\boxed{f'(t_k)=\frac{f_{k+1}-f_k}{h}+O(h)}$$

A Taylor-formulából ui:

$$f_{k+1}=f_k+f_k'\cdot h+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot h^2.$$

*Első derivált, centrális séma*:

$$\boxed{f'(t_k) = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h} + O(h^2)}$$

Ui. $f_{k+1} = f_k + f_k' \cdot h + \frac{f_k''}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(\xi_+)}{3!} \cdot h^3$, és

$$f_{k-1} = f_k - f_k' \cdot h + \frac{f_k''}{2!} \cdot h^2 - \frac{f'''(\xi_-)}{3!} \cdot h^3.$$

A két egyenlőséget kivonva, az állítás adódik.

*Második derivált, centrális séma*:

$$\boxed{f''(t_k) = \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{h^2} + O(h^2)}$$

Ui. $f_{k+1} = f_k + f_k' \cdot h + \frac{f_k''}{2!} \cdot h^2 + \frac{f_k'''}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_+)}{4!} \cdot h^4$, és

$$f_{k-1} = f_k - f_k' \cdot h + \frac{f_k''}{2!} \cdot h^2 - \frac{f_k'''}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_-)}{4!} \cdot h^4$$

A két egyenlőséget összeadva, az állítás adódik.

*Harmadik derivált, centrális séma*:

$$\boxed{f'''(t_k) = \frac{f_{k+2} - 2f_{k+1} + 2f_{k-1} - f_{k-2}}{2h^3} + O(h^2)}$$

$$f_{k+1} = f_k + f_k' \cdot h + \frac{f_k''}{2!} \cdot h^2 + \frac{f_k'''}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}{}_k}{4!} \cdot h^4 + \frac{f^V(\xi_+)}{5!} \cdot h^5$$

$$f_{k-1} = f_k - f_k' \cdot h + \frac{f_k''}{2!} \cdot h^2 - \frac{f_k'''}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}{}_k}{4!} \cdot h^4 - \frac{f^V(\xi_-)}{5!} \cdot h^5$$

$$f_{k+1} - f_{k-1} = 2f_k' \cdot h + \frac{f_k'''}{3} \cdot h^3 + \frac{f^V(\xi_+)}{120} \cdot h^5 + \frac{f^V(\xi_-)}{120} \cdot h^5$$

$$f_{k+2} - f_{k-2} = 4f_k' \cdot h + \frac{8f_k'''}{3} \cdot h^3 + \frac{32f^V(\xi_+)}{120} \cdot h^5 + \frac{32f^V(\xi_-)}{120} \cdot h^5$$

Ebből az előző 2-szeresét kivonva, az állítás adódik.

# Görbeillesztés: Bernstein-polinomok, Bézier-görbék

Legyen $t_k := \dfrac{k}{N}$ $(k = 0,1,...,N)$, és legyenek $f_0, f_1,..., f_N \in \mathbf{R}$ hozzárendelt értékek.

**Bernstein-polinom**: $\boxed{B_N(t) := \sum_{k=0}^{N} f_k \cdot \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k}}$ $(t \in [0,1])$

1. $\boxed{\text{Ha } f_0, f_1,..., f_N = 1, \text{ akkor } B_N(t) \equiv 1.}$

Ui. ekkor $B_N(t) := \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k} = (t+1-t)^N = 1.$

2. $\boxed{\text{Ha } f_k = t_k \quad (k = 0,1,\ldots,N)\text{, akkor } B_N(t) = t\,.}$

Legyen $g(p) := \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = (p+q)^N$: Deriválva ($p$ szerint):

$g'(p) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} k p^{k-1} q^{N-k} = N(p+q)^{N-1}$. Szorozva $\dfrac{p}{N}$-nel:

$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \dfrac{k}{N} p^k q^{N-k} = p(p+q)^{N-1}$. Spec. $p := t, \quad q := (1-t)$:

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{k}{N} t^k (1-t)^{N-k} = B_N(t) = t(t+1-t)^{N-1} = t\,.$$

3. $\boxed{B_N(0) = f_0, \quad B_N(1) = f_N}$.

4. $\boxed{B'_N(0) = \dfrac{f_1 - f_0}{h}, \quad B'_N(1) = \dfrac{f_N - f_{N-1}}{h}}$

$$B'_N(t) = \sum_{k=0}^{N} f_k \cdot \binom{N}{k} k t^{k-1} (1-t)^{N-k} - \sum_{k=0}^{N} f_k \cdot \binom{N}{k} t^k (N-k)(1-t)^{N-k-1}$$

$$B'_N(0) = f_1 \cdot \binom{N}{1} - f_0 \cdot N = \frac{f_1 - f_0}{h},$$

$$B'_N(1) = f_N \cdot N - f_{N-1} \cdot \binom{N}{N-1} = \frac{f_N - f_{N-1}}{h}.$$

**Görbeillesztés**: $t_k := \dfrac{k}{N}$ $(k = 0,1,...,N)$, és mindegyik *k*-hoz rendeljünk egy $\mathbf{x}_k$ pontot (a síkon, vagy a térben). Mindegyik komponenshez készítsünk el egy Bernstein-polinomot:

$$\boxed{\mathbf{B}_N(t) := \sum_{k=0}^{N} \mathbf{x}_k \cdot \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k}}$$

Akkor a $t \to \mathbf{B}_N(t)$ görbe az adott $\mathbf{x}_k$ pontokhoz illeszkedő görbe.

5. Az illesztett görbe teljes egészében az adott $\mathbf{x}_k$ $(k = 0,1,...,N)$ pontok konvex burkában helyezkedik el.

Ui. a $\binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k}$ súlyok nemnegatívak, és összegük 1.

# Görbeillesztés: B-spline-ok

Legyenek adottak a $p_1, p_2, ..., p_N$ számok (vagy vektorok).

**Másodfokú B-spline-ok**: legyen $u \in [0,1]$, és

$$\boxed{r(u) := \frac{u^2 - 2u + 1}{2} p_{k-1} + \frac{-2u^2 + 2u + 1}{2} p_k + \frac{u^2}{2} p_{k+1}}$$

Ezt elkészítjük minden $p_{k-1}, p_k, p_{k+1}$ adathármasra. Szakaszonként értelmezett, szakaszonként másodfokú polinomot kapunk.
Ha $p_1, p_2, ..., p_N$ vektorok, akkor ez görbeillesztés.

Ezek a polinomok egymáshoz $C^1$**-folytonosan csatlakoznak**:

$$r(0) = \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_k \qquad r(1) = \frac{1}{2} p_k + \frac{1}{2} p_{k+1}$$

(értékek folytonos csatlakozása)

Mivel pedig $r'(u) = \frac{2u-2}{2} p_{k-1} + \frac{-4u+2}{2} p_k + \frac{2u}{2} p_{k+1}$, azért

$$r'(0) = -p_{k-1} + p_k \qquad r'(1) = -p_k + p_{k+1}$$

(deriváltak folytonos csatlakozása)

**Harmadfokú B-spline-ok**: legyen $u \in [0,1]$, és

$$\boxed{\begin{aligned} r(u) := {} & \frac{1-3u+3u^2-u^3}{6} p_{k-1} + \frac{4-6u^2+3u^3}{6} p_k + \\ & + \frac{1+3u+3u^2-3u^3}{6} p_{k+1} + \frac{u^3}{6} p_{k+2} \end{aligned}}$$

Ezt elkészítjük minden $p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}$ adatnégyesre.

Szakaszonként értelmezett, szakaszonként harmadfokú polinomot kapunk.

Ha $p_1, p_2, ..., p_N$ vektorok, akkor ez görbeillesztés.

Ezek a polinomok egymáshoz $C^2$ **-folytonosan csatlakoznak**:

$$r(0) = \frac{1}{6} p_{k-1} + \frac{4}{6} p_k + \frac{1}{6} p_{k+1} \qquad r(1) = \frac{1}{6} p_k + \frac{4}{6} p_{k+1} + \frac{1}{6} p_{k+2}$$

(értékek folytonos csatlakozása)

$$r'(u) = \frac{-3 + 6u - 3u^2}{6} p_{k-1} + \frac{-12u + 9u^2}{6} p_k +$$

$$+ \frac{3 + 6u - 9u^2}{6} p_{k+1} + \frac{3u^2}{6} p_{k+2}$$

$$r''(u) = \frac{6 - 6u}{6} p_{k-1} + \frac{-12 + 18u}{6} p_k + \frac{6 - 18u}{6} p_{k+1} + \frac{6u}{6} p_{k+2}$$

(1. és 2. deriváltak folytonos csatlakozása)