Numerikus módszerek 1. Alapvető fogalmak és összefüggések

Hogyan mérjük azt, hogy egy függvény „nagy” vagy „kicsi”?

- Pl. $C[a,b]$-n (az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények terében) legyen

$$\| f \|_C := \max_{a \le x \le b} | f(x) | \quad \textbf{(maximum-norma vagy C-norma)}$$

- Egy másik lehetőség:

$$\| f \|_1 := \int_a^b | f(x) | \, dx \qquad (L_1\textbf{-norma})$$

- Egy harmadik lehetőség: $\| f \|_2 := \sqrt{\int_a^b | f(x) |^2 \, dx} \qquad (L_2\textbf{-norma})$

… és még számtalan más lehetőség is van …

Mindenféleképp:

- $\| f \| \geq 0$, és $\| f \| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f = 0$
- $\| \alpha \cdot f \| = | \alpha | \cdot \| f \|$
- $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ („háromszög-egyenlőtlenség”)

Hogyan mérjük azt, hogy két függvény „közel van” egymáshoz vagy „távol”?

Az f és g függvények **távolsága**: $\| f - g \|$

Mit értsünk az alatt, hogy egy függvénysorozat konvergál egy függvényhez?

$f_n \to f$, ha $\| f_n - f \| \to 0$.

Hogyan mérjük azt, hogy egy vektor (szám-*n*-es) „nagy” vagy „kicsi”?

- Pl. $\mathbf{R}^n$-ben (a rendezett valós szám-*n*-esek terében) legyen

$$\| \mathbf{x} \|_{\max} := \max_{1 \le j \le n} | x_j | \quad \textbf{(maximum-norma)}$$

- Egy másik lehetőség:

$$\| \mathbf{x} \|_1 := \sum_{j=1}^{n} | x_j | \qquad \textbf{(összeg-norma)}$$

- Egy harmadik lehetőség:

$$\| \mathbf{x} \|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} | x_j |^2} \qquad \textbf{(euklideszi norma)}$$

… és még számtalan más lehetőség is van …

Mindenféleképp:

- $\| \mathbf{x} \| \geq 0$, és $\| \mathbf{x} \| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\| \alpha \cdot \mathbf{x} \| = | \alpha | \cdot \| \mathbf{x} \|$
- $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$ („háromszög-egyenlőtlenség”)

Hogyan mérjük azt, hogy két vektor (szám-*n*-es) „közel van” egymáshoz vagy „távol”?

Az **x** és **y** vektorok **távolsága**: $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$

Mit értsünk az alatt, hogy egy vektorsorozat konvergál egy vektorhoz?

$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, ha $\| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| \to 0$.

Vektorterek

Az X nemüres halmazt (valós) **vektortérnek** nevezzük, ha X elemei közt értelmezett egy *összeadás*, **R** és X elemei közt pedig egy *skalárral való szorzás* úgy, hogy a *vektortér-axiómák* teljesülnek:

Tetszőleges $x, y, z \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ esetén:

- $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív);
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ (az összeadás asszociatív);
- létezik X-ben egy **0** *zérusvektor*, melyre $x + \mathbf{0} = x$ teljesül minden $x \in X$ -re;
- az összeadás *invertálható*, azaz bármely $x \in X$ vektorhoz van oly másik $x_{-1} \in X$ vektor, hogy összegük a zérusvektor: $x + x_{-1} = \mathbf{0}$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
- $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ $\qquad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $1 \cdot x = x$

Az $X_0 \subset X$ részhalmaz **altér**, ha X_0 maga is vektortér az X-beli műveletekre nézve.

Példák vektortérre:

- A valós számok **R** halmaza maga is vektortér a közönséges összeadásra és a szorzásra nézve.
- A komplex számok **C** halmaza maga is vektortér a komplex összeadásra és a valós számmal való szorzásra nézve.
- A valós számpárok $\mathbf{R}^2$ halmaza vektortér a komponensenkénti műveletekre nézve:
  $(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d), \qquad \lambda\cdot(a,b):=(\lambda a,\lambda b)$
- A valós számhármasok $\mathbf{R}^3$ halmaza vektortér a komponensenkénti műveletekre nézve:
  $(a,b,c)+(u,v,w):=(a+u,b+v,c+w), \quad \lambda\cdot(a,b,c):=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$
- A valós szám-n-esek $\mathbf{R}^n$ halmaza vektortér a komponensenkénti műveletekre nézve:
  $(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n):=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$
  $\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n):=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$
- Az $n\times m$-es mátrixok $\mathbf{M}_{n\times m}$ halmaza vektortér a komponensenkénti műveletekre nézve:
  $[a_{kj}]+[b_{kj}]:=[a_{kj}+b_{kj}]$
  $\lambda\cdot[a_{kj}]:=[\lambda a_{kj}]$

Példák vektortérre:

- Legyen A tetszőleges halmaz. Az összes A-n értelmezett $f : A \to \mathbf{R}$ számértékű függvények halmaza vektorteret alkot a függvények összeadására és számmal való szorzására nézve:
  $(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

- Legyen $[a,b]$ egy *véges, zárt* intervallum. Az összes $[a,b]$-n értelmezett *folytonos* függvények $C[a,b]$ halmaza vektorteret alkot a függvények összeadására és számmal való szorzására nézve. Ez a vektortér altere az $[a,b]$-n értelmezett függvények vektorterének.

- Legyen $[a,b]$ egy *véges, zárt* intervallum. Az összes $[a,b]$-n értelmezett *k-szor folytonosan differenciálható* függvények $C^k[a,b]$ halmaza vektorteret alkot a függvények összeadására és számmal való szorzására nézve. Ez a vektortér altere a $C[a,b]$ vektortérnek, és ha $m > k$, akkor $C^m[a,b]$ altere $C^k[a,b]$-nek.

Normált terek

Az X vektorteret **normált térnek** nevezzük, ha X-en értelmezve van egy $\|.\|$-val jelölt valós értékű függvény (norma), a következő tulajdonságokkal (norma-axiómák):

- $\| x \| \geq 0$
- $\| x \| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \mathbf{0}$;
- $\| \alpha \cdot x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$;
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Példák:

- **R**-en legyen $\| x \| := | x |$; az így definiált $\|.\|$ függvény teljesíti a norma-axiómákat.

- **C**-n legyen $\| z \| := | z |$; az így definiált $\|.\|$ függvény teljesíti a norma-axiómákat. (A háromszög-egyenlőtlenség a geometriai háromszög-egyenlőtlenség azonnali következménye.)

Példák véges dimenziós térben:

$\mathbf{R}^n$-en legyen $\| x \|_{\max} := \max(| x_1 |,\ldots,| x_n |)$; az így definiált $\| . \|_{\max}$ függvény teljesíti a norma-axiómákat (**maximum-norma**). A háromszög-egyenlőtlenség:

$$\| x + y \|_{\max} = \max_k | x_k + y_k | \le \max_k | x_k | + \max_k | y_k | = \| x \|_{\max} + \| y \|_{\max}$$

Egy másik lehetőség: $\| x \|_1 := \sum_{k=1}^{n} | x_k |$ (**összeg-norma**). Most a háromszög-egyenlőtlenség:

$$\| x + y \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k + y_k | \le \sum_{k=1}^{n} | x_k | + \sum_{k=1}^{n} | y_k | = \| x \|_1 + \| y \|_1$$

Egy harmadik lehetőség: $\| x \|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2}$ (**euklideszi norma**). A háromszög-egyenlőtlenség:

$$\| x + y \|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} | x_k + y_k |^2 = \sum_{k=1}^{n} | x_k |^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} | y_k |^2 \le \| x \|_2^2 + 2 \| x \|_2 \cdot \| y \|_2 + \| y \|_2^2,$$

ahol felhasználtuk a *Cauchy-egyenlőtlenséget*.

Példák végtelen dimenziós térben:

- $C[a,b]$-n legyen $\| f \|_C := \max\limits_{a \le x \le b} | f(x) |$; az így definiált $\|.\|$ függvény teljesíti a norma-axiómákat (**maximum-norma vagy C-norma**).

Egy másik lehetőség: $\| f \|_1 := \int\limits_a^b | f(x) | \, dx$. Ez is kielégíti a norma-axiómákat (L_1**-norma**).

Egy harmadik lehetőség: $\| f \|_2 := \int\limits_a^b | f(x) |^2 \, dx$ (L_2**-norma**). Itt a háromszög-egyenlőtlenség:

$$\| f + g \|_2^2 = \int\limits_a^b | f(x) + g(x) |^2 \, dx = \int\limits_a^b | f(x) |^2 \, dx + 2\int\limits_a^b f(x) g(x) \, dx + \int\limits_a^b | g(x) |^2 \, dx \le$$

$$\le \| f \|_2^2 + 2 \| f \|_2 \cdot \| g \|_2 + \| g \|_2^2 \quad ,$$

ahol felhasználtuk a *Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget*.

- $C^k[a,b]$-n legyen $\| f \|_{C^k} := \sum\limits_{j=0}^{k} \max\limits_{a \le x \le b} | f^{(j)}(x) |$; az így definiált $\|.\|$ függvény teljesíti a norma-axiómákat.

Banach-terek

Legyen X normált tér. Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset X$ vektorsorozat

- **korlátos**, ha az $\| x_n \|$ számsorozat korlátos, azaz $\| x_n \| \leq C$ teljesül alkalmas $C \geq 0$ számra;
- **konvergens**, éspedig az $x \in X$ vektorhoz tart, ha az $\| x_n - x \|$ számsorozat zérussorozat, azaz $\| x_n - x \| \to 0$;
- **Cauchy-sorozat**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van oly N küszöbindex, hogy $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$ teljesül minden $n, m \geq N$ indexre.

Tetszőleges X normált térben:
minden konvergens sorozat korlátos is,
és minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat is

Az X normált teret **teljesnek** vagy **Banach-térnek** nevezzük, ha X-ben minden Cauchy-sorozat konvergens.

Példák Banach-terekre:

- Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér is.
- A $C[a,b]$ tér Banach-tér a C-normával, de nem Banach-tér az L_1-normával.

Euklideszi terek, Hilbert-terek

Az X vektorteret **euklideszi térnek** nevezzük, ha X-en értelmezve van egy $\langle .,. \rangle$-val jelölt kétváltozós (valós vagy komplex értékű) függvény (*skaláris szorzat*), a következő tulajdonságokkal:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$, és $\langle x, x \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \mathbf{0}$
- $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Minden X euklideszi tér egyúttal normált tér is az $\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ normával (*skaláris szorzat által indukált norma*), továbbá minden $x, y \in X$ esetén érvényes az $|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \cdot \| y \|$ *Cauchy-egyenlőtlenség*.

Az X euklideszi tér **Hilbert-tér**, ha teljes is (a skaláris szorzat által indukált norma szerint).

Minden véges dimenziós euklideszi tér Hilbert-tér.

A Cauchy-egyenlőtlenség bizonyítása:
Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tér *valós*. Akkor minden x, y-ra:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\langle x, y \rangle + \| y \|^2$$

Tetszőleges $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett $\| x - \alpha y \|^2 \geq 0$, ezért:

$$\| x - \alpha y \|^2 = \| x \|^2 - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \| y \|^2 \geq 0$$

Speciálisan, $\alpha := \| x \| / \| y \|$ mellett: $\| x \|^2 - 2\dfrac{\| x \|}{\| y \|}\langle x, y \rangle + \dfrac{\| x \|^2}{\| y \|^2}\| y \|^2 \geq 0$,

ahonnan $\langle x, y \rangle \leq \| x \| \cdot \| y \|$. És x helyébe $(-x)$-et írva: $-\langle x, y \rangle \leq \| x \| \cdot \| y \|$ is igaz.

A háromszög-egyenlőtlenség igazolása a skaláris szorzat által indukált normában:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\langle x, y \rangle + \| y \|^2 \leq$$

$$\leq \| x \|^2 + 2 | \langle x, y \rangle | + \| y \|^2 \leq$$

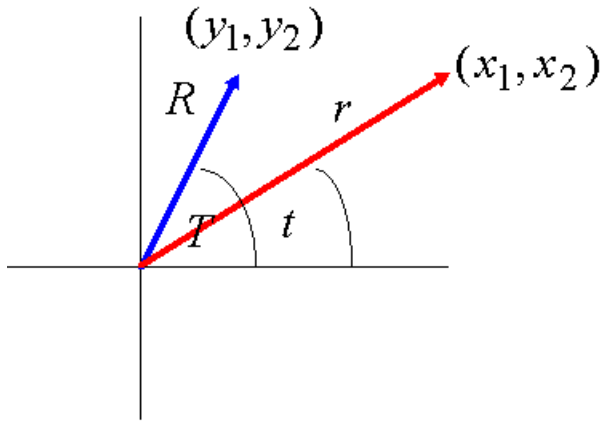
$$\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$$

Példák:

- Az **R** tér Hilbert-tér az $\langle x, y \rangle := xy$ skaláris szorzattal.
- A **C** tér Hilbert-tér az $\langle x, y \rangle := x\overline{y}$ skaláris szorzattal.
- Az $\mathbf{R}^2$ tér Hilbert-tér az $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$ skaláris szorzattal.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = Rr \cos t \cos T + Rr \sin t \sin T = Rr \cos(T - t)$$

Geometriai szemléltetés:



Röviden: $\langle x, y \rangle = \| x \| \cdot \| y \| \cdot \cos\theta$, ahol θ az x és y vektorok által bezárt szög.

Példák euklideszi terekre:

Az $\mathbf{R}^n$ tér Hilbert-tér az $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ skaláris szorzattal. Az ez által indukált norma az **euklideszi norma**.

A Cauchy-egyenlőtlenség konkrét alakja itt: $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | y_k |^2}$.

Sem a maximum-norma, sem az összeg-norma nem indukálható skaláris szorzattal.

A $C[a,b]$ tér euklideszi tér az $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ skaláris szorzattal (**L_2-skaláris szorzat**), de nem teljes, azaz nem Hilbert-tér. Az $L_2(a,b)$ tér viszont Hilbert-tér.

A Cauchy-egyenlőtlenség konkrét alakja most: $\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \right| \le \sqrt{\int_a^b | f(x) |^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b | g(x) |^2\,dx}$

(Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség)

Sem a maximum-norma, sem az L_1-norma nem indukálható skaláris szorzattal.

Lineáris operátorok

Legyenek X, Y vektorterek. Az $A: X \to Y$ leképezést **lineáris leképezésnek** vagy **lineáris operátornak** nevezzük, ha $A(x+y) = A(x) + A(y)$ és $A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x)$ teljesül minden $x, y \in X$ vektor és λ esetén. A számértékű lineáris leképezéseket gyakran *lineáris funkcionálok-nak* nevezzük.

Példák:

- $A: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad Ax := a \cdot x$ (ahol $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans). Akkor A lineáris leképezés.
- $D: C^1[a,b] \to C[a,b], \quad Df := f'$. (differenciálás operátora). Akkor D lineáris leképezés.
- Legyen $I: C[a,b] \to \mathbf{R}, \quad If := \int_a^b f(x)dx$. Akkor I lineáris funkcionál.
- Legyen I egy, a 0-t tartalmazó véges, zárt intervallum, és $\delta: C[I] \to \mathbf{R}, \quad \delta f := f(0)$. Akkor δ lineáris leképezés. (*Dirac-féle* δ*-funkcionál*)
- Legyen $A \in \mathbf{M}_{n \times n}$. Az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad x \to Ax$ leképezés egy lineáris leképezése $\mathbf{R}^n$-nek önmagára. (Ezt a leképezést, ha nem okoz félreértést, ugyancsak A-val jelöljük.)

Korlátosság és folytonosság

Legyenek X, Y normált terek, $A: X \to Y$ egy lineáris operátor.

Az $A: X \to Y$ lineáris operátor **korlátos**, ha van oly $K \geq 0$ szám, hogy $\| Ax \| \leq K \cdot \| x \|$ teljesül minden $x \in X$ esetén. K-t az A operátor egy *korlátjának* nevezzük.

Egy $A: X \to Y$ lineáris operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos.

Ekkor A legkisebb felső korlátját A (operátor)*normájának* nevezzük (jele $\| A \|$) .

$$\| A \| = \sup\{\| Ax \| : x \in X, \| x \| \leq 1\}$$

Röviden tehát: ha az $A: X \to Y$ lineáris leképezés folytonos (korlátos), akkor $\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$, és $\|A\|$ a legkisebb ilyen tulajdonságú szám.

A operátornorma függ az X és Y terek normáitól!

Ha $A: X \to Y$ és $B: Y \to Z$ folytonosak, akkor a BA szorzatoperátor is az, és
$$\| BA \| \leq \| B \| \cdot \| A \|$$

Példák korlátos (folytonos) lineáris operátorokra:

- Az $I : X \to X$ identikus operátor folytonos, normája mindig 1 (az X tér normájától függetlenül).

- A zérusoperátor folytonos, normája mindig 0 (az X tér normájától függetlenül).

Ha X, Y *véges dimenziósak*, akkor minden $A : X \to Y$ lineáris operátor folytonos is.

- A differenciálás $D : C^1[a,b] \to C[a,b], \quad Df := f'$ operátora folytonos e terek normái szerint.

- A Dirac-funkcionál a $C(I)$-norma szerint folytonos, de az L_1-norma szerint nem az.

Mátrixok és véges dimenziós lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$, és tekintsük az

$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad x \to Ax$$

leképezést. Így $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezést definiáltunk, melyet ugyancsak A-val jelölünk. Így minden mátrixnak egyértelműen megfeleltettünk egy lineáris leképezést és viszont.

Ugyanakkor $\mathbf{M}_{m\times n}$ maga is vektortér, így többféle mátrixnormát is értelmezhetünk:

Mátrixnormák, melyek nem operátornormák:

- Összeg-norma: $\| A \| := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} |$
- Frobenius-norma: $\| A \| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} |^2}$

Ezek a normák *nem* indukálhatók vektornormával (az egységmátrix normája nem 1)

Vektornorma által indukált mátrixnormák (operátornormák):

Ha $\mathbf{R}^m$-ben és $\mathbf{R}^n$-ben egyaránt a maximum-norma adott, akkor az operátornorma az abszolút értékkel vett sorösszegek maximuma (sor-norma):

$$\| A \|_{\max} = \max_{1 \le k \le m} \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} |$$

$$\| Ax \|_{\max} = \max_{1 \le k \le m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right| \le \max_{1 \le k \le m} \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} | \cdot | x_j | \le \left(\max_{1 \le k \le m} \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} | \right) \cdot \left(\max_{1 \le j \le n} | x_j | \right) = \| A \|_{\max} \cdot \| x \|_{\max}$$

Ha $\mathbf{R}^m$-ben és $\mathbf{R}^n$-ben egyaránt az összeg-norma adott, akkor az operátornorma az abszolút értékkel vett oszlopösszegek maximuma (oszlop-norma):

$$\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{m} | a_{kj} |$$

$$\| Ax \|_1 = \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right| \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} | \cdot | x_j | = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} | a_{kj} | \right) \cdot | x_j | \le \left(\max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{m} | a_{kj} | \right) \cdot \sum_{j=1}^{n} | x_j | = \| A \|_1 \cdot \| x \|_1$$

Ha $\mathbf{R}^m$-ben és $\mathbf{R}^n$-ben egyaránt az euklideszi norma adott, akkor az operátornorma általában nem áll elő a mátrixelemek egyszerű függvényeként. Speciálisan, ha *A önadjungált, pozitív definit*, akkor az operátornorma a maximális sajátértékkel egyezik.

Trigonometrikus Fourier-sorok $L_2(0,2\pi)$-ben

Tetszőleges $f \in L_2(0,2\pi)$ függvény előállítható az $L_2(0,2\pi)$-normában konvergens

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

trigonometrikus Fourier-sorral, ahol az együtthatók az alábbi módon számíthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\,dx.$$

Komplex exponenciális függvény

Tetszőleges $z \in \mathbf{C}$-re $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$ **(exponenciális sor)**

A exponenciális sor minden $z \in \mathbf{C}$ esetén *abszolút konvergens*. Speciálisan, ha *z* valós, akkor összege egyezik a közönséges *e* alapú exponenciális függvény helyettesítési értékével.

(Euler-formula): Minden $t \in \mathbf{R}$ esetén: $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Felhasználva ui. a szinusz- és koszinuszfüggvény ismert Taylor-sorait:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots, \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots,$$

kapjuk, hogy:

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{i^2 t^2}{2!} + \frac{i^3 t^3}{3!} + \frac{i^4 t^4}{4!} + \frac{i^5 t^5}{5!} \ldots = 1 + \frac{it}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} \ldots$$

A valós és képzetes részeket szétválasztva, az állítás már adódik.

A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Ha $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1} \in \mathbf{C}$ egy véges sorozat, ennek **diszkrét Fourier-transzformáltja:**

$$\hat{f}_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,N-1)$$

Kapcsolat a Fourier-sorokkal: Legyen f egy, a $[0,2\pi]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, és jelölje $f_j := f(\frac{2j\pi}{N})$. Akkor az $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i}$ összeg az $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx$ integrál egy Riemann-összege. Innen, felhasználva az Euler-formulát:

$$\frac{1}{N}\hat{f}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx + i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = a_k + ib_k$$

ahol a_k, b_k a trigonometrikus Fourier-együtthatók.

Műveletigény: $O(N^2)$, és ez túl nagy!

A diszkrét inverz Fourier-transzformáció (iDFT)

Minden véges sorozat egyértelműen rekonstruálható a DFT ismeretében, éspedig:

$$f_k := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j e^{-\frac{2kj\pi}{N}i} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,N-1)$$

(diszkrét inverz Fourier-transzformáció, iDFT)

Tetszőleges $k = 0,1,2,\ldots,N-1$-re ui.:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j e^{-\frac{2kj\pi}{N}i} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{\frac{2rj\pi}{N}i} e^{-\frac{2kj\pi}{N}i} = \sum_{r=0}^{N-1} f_r \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2(r-k)j\pi}{N}i} = \sum_{r=0}^{N-1} f_r \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} z^j,$$

ahol $z := e^{\frac{2(r-k)\pi}{N}i}$. Ha most $r = k$, akkor $z = 1$, ezért $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} z^j = 1$. Ha r különbözik k-tól, akkor z is különbözik 1-től, és a belső szumma egy véges geometriai sor összege:

$$\sum_{j=0}^{N-1} z^j = \frac{z^N - 1}{z-1} = \frac{e^{2(r-k)\pi i} - 1}{z-1} = \frac{1-1}{z-1} = 0,$$ ahonnan az állítás már következik.

A gyors Fourier-transzformáció (FFT)

Jelölje $F_N : \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$ a DFT (lineáris!) operátorát: $(F_N f)_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \quad (k = 0,1,\ldots,N-1)$

Legyen N páros: $N := 2N_1$, és $(F_N f)_k$ kifejezésében válasszuk szét a páros és páratlan indexű tagokat. Legyen először csak $k = 0,1,\ldots,N_1 - 1$:

$$(F_N f)_k = \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N}k\cdot 2l} + \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N}k\cdot(2l+1)} = \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N}k\cdot 2l} + e^{\frac{2\pi i}{N}k} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N}k\cdot 2l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N_1}kl} + e^{\frac{2\pi i}{N}k} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N_1}kl}$$

A gyors Fourier-transzformáció (FFT)

Jelölje $F_N : \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$ a DFT (lineáris!) operátorát: $(F_N f)_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \quad (k = 0,1,\ldots,N-1)$

Legyen N páros: $N := 2N_1$, és $(F_N f)_k$ kifejezésében válasszuk szét a páros és páratlan indexű tagokat. Az $N_1 + k$ alakú indexekre ($k = 0,1,\ldots,N_1 - 1$) hasonlóan:

$$(F_N f)_{N_1+k} = \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N_1}(N_1+k)l} + e^{\frac{2\pi i}{N}(N_1+k)} \cdot \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N_1}(N_1+k)l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N_1}kl} - e^{\frac{2\pi i}{N}k} \cdot \sum_{l=0}^{N_1-1} f_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N_1}kl}$$

Mindkét esetben, mindkét jobboldali szumma maga is egy-egy diszkrét Fourier-transzformált, de csak feleakkora vektorokkal. Az eljárás rekurzív módon folytatható, ha N 2-hatvány.

A gyors Fourier-transzformáció (FFT) rekurzív algoritmusa

• $N_1 := N/2, \quad f^{(0)} := (f_0, f_2, \ldots, f_{2N_1-2}), \quad f^{(1)} := (f_1, f_3, \ldots, f_{2N_1-1})$
Rekurzív hívásokkal, legyen
• $\hat{f}^{(0)} := F_{N_1} f^{(0)}, \quad \hat{f}^{(1)} := F_{N_1} f^{(1)}$
• $(F_N f)_k := \hat{f}_k^{(0)} + e^{\frac{2\pi i k}{N}} \cdot \hat{f}_k^{(1)} \quad (k = 0,1,\ldots,N_1-1)$ $(F_N f)_{N_1+k} := \hat{f}_k^{(0)} - e^{\frac{2\pi i k}{N}} \cdot \hat{f}_k^{(1)} \quad (k = 0,1,\ldots,N_1-1)$

ahol $N = 1$ esetén $F_1 f := f$ (itt f már egyelemű vektor).

Műveletigény: $O(N \log N)$, és ez sokkal jobb, mint $O(N^2)$!

Az algoritmus kiterjeszthető az *inverz diszkrét Fourier-transzformált* számítására is.

Kétdimenziós diszkrét Fourier-transzformáció

Az $f \in \mathbf{M}_{N\times N}$ mátrix diszkrét Fourier-transzformáltja a következő $\hat{f} \in \mathbf{M}_{N\times N}$ mátrix:

$$\hat{f}_{k,j} = \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{N-1} f_{r,s} e^{\frac{2\pi ikr}{N}} e^{\frac{2\pi ijs}{N}}$$

Jelölje F az 1D diszkrét Fourier-transzformáltat, akkor:

$$\hat{f}_{k,j} = \sum_{r=0}^{N-1}\left(\sum_{s=0}^{N-1} f_{r,s} e^{\frac{2\pi ijs}{N}}\right) e^{\frac{2\pi ikr}{N}} = \sum_{r=0}^{N-1} (Ff_{r,.})_j e^{\frac{2\pi ikr}{N}}$$

A 2D diszkrét Fourier-transzformált kiszámításának algoritmusa tehát:

- Az f mátrix minden sorának helyébe írjuk be a sor 1D DFT-jét.
- Az így nyert mátrix minden oszlopának helyébe írjuk be az oszlop 1D DFT- jét.
- Az így kapott mátrix az eredeti f mátrix 2D diszkrét Fourier-transzformáltja.

Az 1D diszkrét Fourier-transzformáltak az FFT-algoritmussal számíthatók. A teljes műveletigény így $O(N^2 \log N)$ ($O(N^4)$ helyett!)