Numerikus módszerek 3. Lineáris algebrai problémák közelítő megoldása

Lineáris egyenletrendszerek

Direkt módszerek

Iterációs módszerek

Sajátértékfeladatok

Általánosított inverz

Lineáris egyenletrendszerek

Legyen $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ adott *reguláris* mátrix, $b \in \mathbf{R}^N$ adott vektor. Megoldandó az alábbi egyenlet:

$$Ax = b$$

Ha a jobboldal perturbált: $b + \Delta b$ alakú, ez Δx hibát okoz a megoldásban: $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Innen: $\Delta x = A^{-1} \Delta b$. Az abszolút hiba:

$$\| \Delta x \| \leq \| A^{-1} \| \cdot \| \Delta b \|$$

A relatív hiba:

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| \Delta b \|}{\| x \|} = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| \Delta b \|}{\| A \| \cdot \| x \|} \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| \Delta b \|}{\| Ax \|} \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|}$$

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq cond(A) \cdot \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|}, \text{ ahol } cond(A) := \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \text{ (kondíciószám)}$$

Egyenletek kondícionáltsága

Ha $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ önadjungált, pozitív definit,

akkor az euklideszi norma által indukált mátrixnormában: $cond(A) = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

mert ekkor $\| A \| = \lambda_{\max}$ és $\| A^{-1} \| = \lambda(A^{-1})_{\max} = \dfrac{1}{\lambda_{\min}}$.

Példa rosszul kondícionált egyenletrendszerre:

$$\begin{aligned} 1000x + 999y &= 1 \\ 999x + 998y &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás: $x = 1, \quad y = -1$

$$\begin{aligned} 1000x + 999y &= 1 \\ 999x + 998y &= 0.999 \end{aligned}$$

Megoldás: $x = 0.001, \quad y = 0$

A rendszer mátrixának kondíciószáma: 3.9920E+6.

Szimmetrizálás

Legyen $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ adott *reguláris* mátrix, $b \in \mathbf{R}^N$ adott vektor. Akkor A^* is reguláris, így az $Ax = b$ egyenletrendszer ekvivalens az

$$A^* Ax = A^* b$$

Gauss-féle normálegyenlettel, melynek mátrixa már önadjungált, pozitív definit. De a kondíció-száma esetleg az előbbi sokszorosa lehet.

Példa: ha A maga is önadjungált, pozitív definit, akkor

$$cond(A^* A) = cond(A^2) = \frac{\lambda_{\max}^2}{\lambda_{\min}^2} = cond(A)^2$$

Rosszul kondícionált egyenletre vezető feladatok

Függvényközelítés polinomokkal: Legyen $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ adott, folytonos függvény, keressük azt a legfeljebb $(N-1)$-fokú $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{N-1}x^{N-1}$ polinomot, mely $L_2(a,b)$-normában legjobban közelíti *f*-et, azaz az

$$E(a_0,a_1,\ldots,a_{N-1}):=\int_0^1\left(f(x)-\sum_{j=0}^{N-1}a_jx^j\right)^2dx$$

hiba minimális. Nyilván:

$$\frac{\partial E}{\partial a_k}=-2\int_0^1\left(f(x)-\sum_{j=0}^{N-1}a_jx^j\right)x^k\,dx \qquad\Rightarrow\qquad \sum_{j=0}^{N-1}A_{kj}a_j=b_k \quad (k=0,1,\ldots,N-1)$$

ahol $A_{kj}=\int_0^1 x^{j+k}dx=\dfrac{1}{j+k+1}$ (Hilbert-mátrix), és $b_k=\int_0^1 f(x)\cdot x^k dx$.

A Hilbert-mátrixok *nagyon rosszul kondícionáltak*, de ha trigonometrikus polinommal közelítünk, akkor a feladat már jól kondícionált.

Rosszul kondícionált egyenletre vezetnek még az *inverz feladatok* is.

Numerikus módszerek 3. Lineáris algebrai problémák közelítő megoldása

Lineáris egyenletrendszerek

Direkt módszerek

Iterációs módszerek

Sajátértékfeladatok

Általánosított inverz

A Gauss-elimináció

Megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N
\end{aligned}
$$

Osszuk le az 1. egyenletet a_{11}-gyel:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1N}x_N = b'_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N
\end{aligned}
$$

A Gauss-elimináció

Az 1. sor a_{k1}-szeresét levonjuk a k-adik sorból (k=2,3,...,N)

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1N}x_N &= b'_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2N}x_N &= b'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a'_{N2}x_2 + a'_{N3}x_3 + \ldots + a'_{NN}x_N &= b'_N
\end{aligned}
$$

és az eljárást megismételjük a 2.,...,N. egyenletre (elimináció).
Az elimináció végén az egyenletek alakja:

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1N}x_N &= d_1 \\
x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2N}x_N &= d_2 \\
x_3 + \ldots + c_{3N}x_N &= d_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_N &= d_N
\end{aligned}
$$

A Gauss-elimináció

Visszahelyettesítések:

$$
\begin{array}{lll}
N. & \text{egyenletből:} & x_N \\
(N-1). & \text{egyenletből:} & x_{N-1} \\
(N-2). & \text{egyenletből:} & x_{N-2} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
1. & \text{egyenletből:} & x_1
\end{array}
$$

Teljes műveletigény: $O(N^3)$. (nagyon nagy!)

Főlemekiválasztás: A *k*-adik egyenlettel való elimináció során előfordulhat, hogy az aktuális **főelem** (a *k*-adik sor *k*-adik eleme) zérus, vagy közel zérus.

Ekkor cseréljük fel a *k*-adik egyenletet valamelyik későbbi egyenlettel: célszerű azzal, melyben a *k*-adik együttható (az új főelem) abszolút értéke a legnagyobb.

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 10 & -12 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llllll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminációi, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 21 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 35 & -35 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llllll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminációi, példa:

$$\begin{array}{llllll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{llll} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & -1 \end{array}$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval

$$AA^{-1} = I$$

Bontsuk oszlopvektorokra A^{-1}-t és I-t:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_N \end{array} \right)$$

$$I = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_N \end{array} \right)$$

Megoldandó N db egyenletrendszer: $Aa_k = e_k \qquad (k = 1,2,\dots,N)$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & -2/3 & -4/9 & 1 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & 9 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & 9 \end{array}\right)$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval, példa:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & 9 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -6 \\ -6 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

A Gauss-Jordan-elimináció

A Gauss-eliminációtól annyiban különbözik, hogy a k-adik egyenlettel való elimináció esetén a k-adik ismeretlent nemcsak a következő, de a *megelőző* egyenletekből is kiküszöböljük. Így a visszahelyettesítés el is marad.

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 10 & -12 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 21 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 35 & -35 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -16 & 18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 35 & -35 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -16 & 18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{llll} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -16 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-eliminació, példa:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -6y & +10z & = & -12 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ 3x & -2y & +z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{array}$$

Az *LU*-felbontás

Ha a Gauss-eliminációt végrehajtható (egyik főelem sem 0),
akkor A egyértelműen előáll $A = LU$ alakban,
ahol L alsó háromszög, U felső háromszög mátrix, L diagonálelemei 1-gyel egyenlők.

Ha az *LU*-felbontás már megvan, az $Ax = b$ egyenletrendszer ekvivalens az $LUx = b$ egyenlet-rendszerrel, azaz:

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

Mindkét egyenlet megoldása numerikusan olcsó ($O(N^2)$ műveletigényű), mert:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 &= b_2 \\ l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 &= b_3 \\ \ldots & \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} &\ldots \\ u_{(N-2),(N-2)}x_{N-2} + u_{(N-2),(N-1)}x_{N-1} + u_{(N-2),N}x_N &= y_{N-2} \\ u_{(N-1),(N-1)}x_{N-1} + u_{(N-1),N}x_N &= y_{N-1} \\ u_{NN}x_N &= y_N \end{aligned}$$

Ha sok jobb oldal mellett kell az egyenletet megoldani, akkor elég az *LU*-felbontást *egyszer* végrehajtani.

Az *LU*-felbontás, példa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Az *LU*-felbontás, példa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Az *LU*-felbontás, példa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{3}{2} & & 1 \end{pmatrix}$$

Az *LU*-felbontás, példa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{3}{2} & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U \qquad\qquad L$$

A Cholesky-felbontás

Ha az A mátrix önadjungált, pozitív definit,
akkor A egyértelműen előáll $A = LL^*$ alakban,
ahol L pozitív diagonálelemű alsó háromszög mátrix.

Ha ui. $A = LU$ az A mátrix LU-felbontása, akkor legyen D az U mátrix diagonális része, ekkor: $A = LU = LDU_0$. Mivel A önadjungált, azért: $A^* = U_0^*(DL^*) = A$. Az LU-felbontás egyértelműsége miatt: $L = U_0^*$, azaz $U_0 = L^*$, ezért $A = LDL^* = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^* = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^*$

Ha Cholesky-felbontás már megvan, az $Ax = b$ egyenletrendszer ekvivalens az $LL^*x = b$ egyenletrendszerrel, azaz:

$$Ly = b, \quad L^*x = y$$

Mindkét egyenlet megoldása numerikusan olcsó ($O(N^2)$ műveletigényű).
Ha sok jobb oldal mellett kell az egyenletet megoldani, akkor elég a Cholesky-felbontást *egyszer* végrehajtani.

Az ortogonalizációs módszer

Vektorrendszerek Gram-Schmidt-ortogonalizálása:

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges lineárisan független vektorok egy euklideszi térben. Legyen

$$\tilde{e}_1 := a_1, \quad e_1 := \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|}, \text{ és } 1 < k \le n\text{-re:}$$

$$\tilde{e}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, e_j \rangle \cdot e_j, \qquad e_k := \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$$

Akkor az így nyert $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorrendszer *ortonormált*, és minden $1 \le k \le n$-re:

$$[e_1, e_2, \ldots, e_k] = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

Az ortogonalizációs módszer

Jelölje az A mátrix sorvektorait $a_1, a_2, ..., a_N$, akkor az $Ax = b$ egyenlet ekvivalens ezzel:

$$\langle x, a_k \rangle = b_k \qquad (k = 1,2,...,N)$$

Jelölje $e_1, e_2, ..., e_N$ az $a_1, a_2, ..., a_N$ vektorokból Gram-Schmidt-ortogonalizálással nyert bázist. Az $\langle x, e_k \rangle$ számok a következő rekurzióval számíthatók:

$$\langle x, e_1 \rangle = \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\| a_1 \|}$$

$$\langle x, e_k \rangle = \frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{\| \tilde{e}_k \|} = \frac{\langle x, a_k \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, e_j \rangle \cdot \langle x, e_j \rangle}{\| \tilde{e}_k \|} = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, e_j \rangle \cdot \langle x, e_j \rangle}{\| \tilde{e}_k \|} \qquad (k = 2,3,...,N)$$

Ezekután a megoldás már előáll a következő (véges Fourier-sor) alakban:

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$$

Műveletigény: $O(N^3)$

Egyenletmegoldás spektrálfelbontással

Legyen $A \in \mathbf{M}_{N\times N}$ *önadjungált*, reguláris mátrix. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ a sajátértéket, $s_1, s_2, ..., s_N$ az ortonormált bázist alkotó sajátvektorokat (léteznek!). Állítsuk elő a jobb oldali b vektort (véges) Fourier-sor alakban:

$$b = \sum_{j=1}^{N} \langle b, s_j \rangle \cdot s_j$$

Akkor az $Ax = b$ egyenlet megoldása:

$$\boxed{x = \sum_{j=1}^{N} \frac{\langle b, s_j \rangle}{\lambda_j} \cdot s_j}$$

mert $Ax = \sum_{j=1}^{N} \frac{\langle b, s_j \rangle}{\lambda_j} \cdot As_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\langle b, s_j \rangle}{\lambda_j} \cdot \lambda_j s_j = \sum_{j=1}^{N} \langle b, s_j \rangle \cdot s_j = b$

A megoldást tehát *explicit formula* adja. Műveletigény: $O(N^2)$.
Hátránya: ismerni kell az összes sajátértéket és egy ortonormált sajátvektorrendszert.

Háromátlós egyenletrendszerek megoldása rekurzióval

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Keressük a megoldást $x_k := m_{k+1}x_{k+1} + n_{k+1}$ alakban („fordított” rekurzió).

Akkor $x_{k-1} := m_k x_k + n_k = m_k(m_{k+1}x_{k+1} + n_{n+1}) + n_k = m_k m_{k+1} x_{k+1} + (m_k n_{n+1} + n_k)$
Behelyettesítve a k-adik egyenletbe $(k = 2,3,\dots,N-1)$:

$$A_k x_{k-1} + B_k x_k + C_k x_{k+1} = A_k[m_k m_{k+1} x_{k+1} + (m_k n_{n+1} + n_k)] + B_k[m_{k+1}x_{k+1} + n_{k+1}] + C_k x_{k+1} =$$
$$= (A_k m_k m_{k+1} + B_k m_{k+1} + C_k)x_{k+1} + (A_k m_k n_{n+1} + A_k n_k + B_k n_{k+1}) = b_k$$

Háromátlós egyenletrendszerek megoldása rekurzióval

Az egyenlőség biztosan teljesül, ha

$$A_k m_k m_{k+1} + B_k m_{k+1} + C_k = 0 \quad \text{és} \quad A_k m_k n_{n+1} + A_k n_k + B_k n_{k+1} = b_k,$$

azaz, ha az m_k, n_k számok kielégítik az alábbi „közönséges” rekurziókat:

$$m_{k+1} = -\frac{C_k}{A_k m_k + B_k}, \qquad n_{k+1} = \frac{b_k - A_k n_k}{A_k m_k + B_k}$$

Legyen $m_1 := 0$, $n_1 := 0$, akkor $m_2 = -\frac{C_1}{B_1}$, $n_2 = \frac{b_1}{B_1}$, és $x_1 = m_2 x_2 + n_2 = -\frac{C_1}{B_1} x_2 + \frac{b_1}{B_1}$,
innen az 1. egyenlet: $B_1 x_1 + C_1 x_2 = -C_1 x_2 + b_1 + C_1 x_2 = b_1$

Legyen a fordított rekurzióban $x_N := n_{N+1}$, akkor $x_{N-1} = m_N x_N + n_N$, innen N. egyenlet:

$$A_N x_{N-1} + B_N x_N = A_N (m_N x_N + n_N) + B_N x_N = (A_N m_N + B_N) x_N + A_N n_N =$$
$$= (A_N m_N + B_N) n_{N+1} + A_N n_N = b_N - A_N n_N + A_N n_N = b_N$$

Háromátlós egyenletrendszerek megoldása rekurzióval

A teljes algoritmus:
Előremenet: 2 db rekurzió:

$$m_1 := 0, \qquad n_1 := 0$$

$$m_{k+1} := -\frac{C_k}{A_k m_k + B_k}, \qquad n_{k+1} := \frac{b_k - A_k n_k}{A_k m_k + B_k}, \qquad (k = 1,\ldots,N)$$

Hátramenet: 1 db fordított rekurzió:

$$x_N := n_{N+1}$$

$$x_{k-1} := m_k x_k + n_k \qquad (k = N, N-1,\ldots,2)$$

Műveletigény: csak $O(N)$!

Numerikus módszerek 3. Lineáris algebrai problémák közelítő megoldása

Lineáris egyenletrendszerek

Direkt módszerek

Iterációs módszerek

Sajátértékfeladatok

Általánosított inverz

Visszavezetés fixpont-iterációra

Az eredeti $Ax = b$ egyenletet hozzuk az alábbi alakra: (erre több lehetőség is van):

$$x = Bx + f\,,$$

és tetszőleges $x_0 \in \mathbf{R}^N$ induló vektor mellett tekintsük az alábbi rekurziót (iterációt):

$$\boxed{x_{n+1} := Bx_n + f \qquad (n = 0,1,2,\ldots)}$$

Ha $\| B \| < 1$, akkor az $F(x) := Bx + f$ leképezés kontrakció, mert

$$\| F(x) - F(y) \| = \| Bx + f - By - f \| \le \| B \| \cdot \| x - y \|$$

Ezért ekkor egyetlenegy fixpont létezik, és az $x_{n+1} := Bx_n + f$ vektorsorozat ide konvergál.

Minél kisebb a $\| B \|$ mátrixnorma, annál gyorsabb a konvergencia.

Visszavezetés fixpont-iterációra

Ha a B mátrix minden sajátértékének abszolút értéke 1-nél kisebb, akkor az iteráció konvergens.

Azonban a konvergencia ténye még nem minden... Ellenpélda:

$$B := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ & \alpha & \beta & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \alpha & \beta \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{N\times N}, \qquad f := \mathbf{0}, \qquad x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N$$

Mindegyik sajátérték α-kel egyenlő. A pontos megoldás a zérusvektor.

Az n-edik iteráltvektor ($N-j$)-edik komponense (ha $n < N$): $x_n^{(N-j)} = \binom{n}{j}\alpha^{n-j}\beta^j$

tehát még a konvergencia bekövetkezte előtt, túlcsordulás miatt a számítás leállhat!
(Pl. $\alpha := 1/2$, $\beta := 2$, $n := 200$, $j := 100$, $N > 200$).

Az egyszerű iteráció

Legyen $A \in \mathbf{M}_{N\times N}$ önadjungált, pozitív definit. Az $Ax = b$ egyenlet ekvivalens az

$$x = x - \omega \cdot (Ax - b) = (I - \omega A)x + \omega b$$

egyenlettel, ahol $\omega > 0$ egy iterációs paraméter. Ez indukálja az alábbi fixpont-iterációt:

$$\boxed{x_{n+1} := (I - \omega A)x_n + \omega b}$$

A fenti iteráció minden elég kicsi $\omega > 0$ paraméter mellett konvergens.

Az iteráció akkor a leggyorsabb, ha $\| I - \omega A \|$ a lehető legkisebb, azaz, ha $\omega = \dfrac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$.

Ez esetben: $\| I - \omega A \| = \dfrac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$

Az optimális iterációs paraméter megállapításához tehát ismerni kell a B mátrix legkisebb és legnagyobb sajátértékét.

A Jacobi-iteráció

Az $Ax = b$ egyenlet mátrixát bontsuk fel egy **diagonálmátrix**, egy **alsó** és egy **felső háromszög-mátrix** összegére: $A = L + D + U$. Akkor $Dx = -(L+U)x + b$, azaz $x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$.

A **Jacobi-iteráció**: $x_{n+1} = -D^{-1}(L+U)x_n + D^{-1}b$. Komponensenként kiírva:

$$x_{n+1}^{(k)} = -\frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_n^{(j)} - \frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj} x_n^{(j)} + \frac{1}{a_{kk}} \cdot b_k \qquad (k = 1,2,\ldots,N)$$

Ha A *diagonálisan domináns*, azaz $\sum_{j \neq k} |a_{kj}| < |a_{kk}|$ akkor a Jacobi-iteráció konvergens.

Ekkor ui. a $B := -D^{-1}(L+U)$ mátrix sor-normája 1-nél kisebb, mert

$$\| B \| = \max_k \sum_{j \neq k} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|} = \max_k \frac{1}{|a_{kk}|} \sum_{j \neq k} |a_{kj}| < 1$$

A Seidel-iteráció

A Jacobi-iterációtól annyiban különbözik, hogy a megoldáskomponensek felújításakor az épp felújított (alacsonyabb indexű) komponenseket azonnal felhasználjuk a következő komponensek felújításában:

$$x_{n+1}^{(k)} = -\frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_{n+1}^{(j)} - \frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj} x_n^{(j)} + \frac{1}{a_{kk}} \cdot b_k \qquad (k = 1,2,\ldots,N)$$

Ha A diagonálisan domináns, vagy önadjungált, pozitív definit,
akkor a Seidel-iteráció konvergens.

Variációs módszerek

Legyen az A mátrix *önadjungált, pozitív definit*, és tekintsük az $Ax = b$ egyenletet.
Jelölje x^* a pontos megoldást.

Jelölje $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$. Ez skaláris szorzat (**energetikai skaláris szorzat**, ***A*-skaláris szorzat**).
Az ezáltal indukált norma az **energetikai norma** vagy ***A*-norma**: $\| x \|_A^2 = \langle Ax, x \rangle$

Jelölje $F(x) := \langle Ax, x \rangle - 2\langle x, b \rangle$ (**energetikai funkcionál**).
Akkor: $F(x) := \langle x, x \rangle_A - 2\langle x, x^* \rangle_A = \| x - x^* \|_A^2 - \| x^* \|_A^2$. Ezért:

Az energetikai funkcionálnak egyetlenegy minimumhelye létezik, és ez megegyezik az $Ax = b$ egyenlet pontos x^* megoldásával.

Variációs módszerek: F minimalizálását célzó módszerek.

Iránymenti minimalizálás

Legyen $e \in \mathbf{R}^N$ adott (irány)vektor, $x \in \mathbf{R}^N$ adott közelítés, és minimalizáljuk az $f(t) := F(x + t \cdot e)$ formulával adott egyváltozós függvényt.

$$F(x+h) = \langle Ax + Ah, x+h \rangle - 2\langle x+h, b \rangle =$$
$$= \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle - 2\langle x, b \rangle - 2\langle h, b \rangle = F(x) + 2\langle Ax - b, h \rangle + \langle Ah, h \rangle$$

ezért F deriváltjára: $DF(x)h = 2\langle Ax - b, h \rangle$, innen $DF(x) = 2(Ax - b)$

Ezekután f minimumhelyének megkeresése a szokásos módon történhet:

$$f'(t) = \langle Df(x + t \cdot e), e \rangle = 2\langle A(x + t \cdot e) - b, e \rangle = 2\langle Ax - b, e \rangle - 2t\langle Ae, e \rangle = 0,$$

A minimumot realizáló t szám: $t = -\dfrac{\langle Ax - b, e \rangle}{\langle Ae, e \rangle}$, így a javított közelítés:

$$\boxed{\tilde{x} = x + t \cdot e = x - \frac{\langle Ax - b, e \rangle}{\langle Ae, e \rangle} \cdot e}$$

A gradiens módszer

Az F energetikai funkcionált mindig a *legmeredekebb változás irányában*, azaz a gradiensvektor irányában minimalizáljuk.

Legyen x_n egy tetszőleges megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, és jelölje $r_n := Ax_n - b$ (maradékvektor). Akkor az r_n irány menti minimalizálás után a javított közelítés:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + t \cdot r_n = x_n - \frac{\langle Ax_n - b, r_n \rangle}{\langle Ar_n, r_n \rangle} \cdot r_n = x_n - \frac{\| r_n \|^2}{\langle Ar_n, r_n \rangle} \cdot r_n}$$

A közelítés hibájára érvényes az alábbi becslés:

$$\| x_n - x^* \|_A^2 \le \left(1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^n \| x_0 - x^* \|_A^2$$

A módszer használatához *nem szükséges ismerni a legnagyobb és legkisebb sajátértéket*!

Műveletigény: minden egyes iterációs lépésben $O(N^2)$.

A konjugált gradiens módszer

Legyen az A mátrix *önadjungált, pozitív definit*, és tekintsük az $Ax = b$ egyenletet.
Legyen $x_0 \in \mathbf{R}^N$ tetszőleges induló közelítés, $r_0 := Ax_0 - b$, $d_0 := -r_0$, és $n = 0,1,2,\ldots$-re:

$$r_n := Ax_n - b$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\langle r_n, d_n \rangle}{\langle Ad_n, d_n \rangle} \cdot d_n$$

$$r_{n+1} := Ax_{n+1} - b$$

$$d_{n+1} := -r_{n+1} + \frac{\langle Ar_{n+1}, d_n \rangle}{\langle Ad_n, d_n \rangle} \cdot d_n$$

A konjugált gradiens módszer (kerekítési hibák nélkül) legfeljebb N iterációs lépésen belül a pontos megoldást adja, így (elvben) a direkt módszerek közé sorolható.

A Tyihonov-féle regularizálás

Legyen az A mátrix nem feltétlen *önadjungált*, és nem feltétlen reguláris. Tekintsük az $Ax = b$ egyenletet. Ha A nem reguláris, vagy rosszul kondícionált, akkor a megoldás problematikus.

Legyen $\alpha \geq 0$ egy paraméter, és minimalizáljuk az

$$F(x) := \| Ax - b \|^2 + \alpha^2 \| x \|^2$$

funkcionált.

$$F(x+h) := \| Ax + Ah - b \|^2 + \alpha^2 \| x + h \|^2 =$$

$$= \| Ax - b \|^2 + 2\langle Ax - b, Ah \rangle + \| Ah \|^2 + \alpha^2 \| x \|^2 + 2\alpha^2 \langle x, h \rangle + \alpha^2 \| h \|^2 =$$

$$= F(x) + 2\left\langle A^*(Ax - b), h \right\rangle + 2\alpha^2 \langle x, h \rangle + O(h^2)$$

Ezért $DF(x) = 2(A^* Ax + \alpha^2 x - A^* b)$. A minimumhelyen tehát:

$$\boxed{(A^* A + \alpha^2 I)x = A^* b}$$

Ez már mindig egyértelműen megoldható, és $\quad cond(A^* A + \alpha^2 I) = \dfrac{\lambda_{\max}(A^* A) + \alpha^2}{\lambda_{\min}(A^* A) + \alpha^2}$

A Tyihonov-féle regularizálás

A közelítés hibája: Legyen x^* a pontos megoldás: $Ax^* = b$, és $x = x^* + \Delta x$ a regularizált megoldás: $(A^*A + \alpha^2 I)x = A^*b$. Akkor:

$$(A^*A + \alpha^2 I)x = A^*Ax + \alpha^2 \cdot x = A^*Ax^* + A^*A\Delta x + \alpha^2 \cdot x^* + \alpha^2 \cdot \Delta x = A^*b$$

$$\Rightarrow \qquad (A^*A + \alpha^2 I)\Delta x = -\alpha^2 \cdot x^*$$

$$\boxed{\| \Delta x \| \le \alpha^2 \cdot \| (A^*A + \alpha^2 I)^{-1} \| \cdot \| x^* \| = \frac{\alpha^2}{\lambda_{\min}(A^*A) + \alpha^2} \cdot \| x^* \|}$$

A közelítő megoldás pl. (konjugált) gradiens módszerrel állítható elő.

Numerikus módszerek 3. Lineáris algebrai problémák közelítő megoldása

Lineáris egyenletrendszerek

Direkt módszerek

Iterációs módszerek

Sajátértékfeladatok

Általánosított inverz

Sajátértékfeladatok

Egy sajátértékfeladat megoldása ekvivalens egy magas fokú egyenlet megoldásával.

$$As = \lambda s \qquad (s \neq \mathbf{0})$$

Gersgorin tétele: Tetszőleges $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ esetén a sajátértékek a komplex síkon az a_{kk} középpontú, $r_k := \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ sugarú zárt körök egyesítésében fekszenek.

Ha ui. λ tetszőleges sajátérték, $s \neq \mathbf{0}$ a hozzátartozó sajátvektor, akkor jelölje k azt az indexet, melyre $|s_k| = \|s\|_{\max}$. Erre a k indexre:

$$(As)_k = \sum_{j=1}^{N} a_{kj} s_j = a_{kk} s_k + \sum_{j \neq k} a_{kj} s_j = \lambda s_k \qquad \Rightarrow \qquad a_{kk} - \lambda = -\sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{s_j}{s_k} \qquad \Rightarrow$$

$$|a_{kk} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \cdot \frac{|s_j|}{|s_k|} \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = r_k$$

Sajátértékfeladatok

Legyen $A \in \mathbf{M}_{N\times N}$ önadjungált, $0 \le |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_N|$ a sajátértékek, $s_1, s_2, \ldots, s_N$ a megfelelő ortonormált sajátvektorok.

A hatvány-módszer: Legyen x_0 olyan induló vektor, mely *nem* ortogonális s_N-re, és képezzük az $x_{n+1} := Ax_n$ sorozatot.

Akkor a $\dfrac{\langle Ax_n, x_n\rangle}{\| x_n \|^2}$ hányadosok (*Rayleigh-hányadosok*) sorozata λ_N-hez tart.

Legyen ui. $x_0 := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j s_j$ $(\alpha_N \neq 0)$, akkor $x_n = A^n x_0 = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_j^n s_j$. Innen egyrészt

$$\langle Ax_n, x_n\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_j^{n+1} s_j, \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \lambda_k^n s_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2 \cdot \lambda_j \cdot |\lambda_j|^{2n},$$ másrészt

$$\| x_n \|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda_j^n s_j, \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \lambda_k^n s_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2 \cdot |\lambda_j|^{2n},$$ ahonnan az állítás már következik.

Sajátértékfeladatok

Legyen $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ önadjungált, $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_N|$ a sajátértékek, $s_1, s_2, \ldots, s_N$ a megfelelő ortonormált sajátvektorok. Alkalmazva a hatványmódszert az A^{-1} inverz mátrixra:

Az inverz iteráció: Legyen x_0 olyan induló vektor, mely *nem* ortogonális s_1-re, és képezzük az $x_{n+1} := A^{-1} x_n$ sorozatot.

Akkor a $\dfrac{\| x_n \|^2}{\left\langle A^{-1} x_n, x_n \right\rangle}$ hányadosok sorozata λ_1-hez tart.

Az iteráció minden egyes lépésében meg kell oldani egy egyenletrendszert ($Ax_{n+1} = x_n$).

Sajátértékfeladatok

A Jacobi-módszer: Legyen $A \in \mathbf{M}_{N\times N}$ önadjungált, és legyen (p,q) az az indexpár $(p<q)$, melyre $|a_{pq}|$ maximális a diagonálison kívül. Jelölje $\operatorname{ctg} 2t := \dfrac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}$, és

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \cos t & \dots & \dots & \dots & \sin t & & \\ & & \dots & 1 & & & \dots & & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & \dots & & & 1 & \dots & & \\ & & -\sin t & \dots & \dots & \dots & \cos t & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Újítsuk fel A-t:

$$A := Q^* A Q,$$

és ismételjük az eljárást. Ha A minden sajátértéke különböző, akkor az így nyert mátrixsorozat egy diagonálmátrixhoz tart, melynek főátlója tartalmazza A sajátértékeit.

Sajátértékfeladatok

A Cholesky-transzformáció: Legyen $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ önadjungált, pozitív definit, legyen $A = LL^*$ a Cholesky-felbontása. Újítsuk fel *A*-t:

$$A := L^* L,$$

határozzuk meg ismét *A* Cholesky-felbontását, és ismételjük az eljárást. Akkor az így nyert mátrixsorozat egy diagonálmátrixhoz tart, melynek főátlója tartalmazza *A* sajátértékeit.

Numerikus módszerek 3. Lineáris algebrai problémák közelítő megoldása

Lineáris egyenletrendszerek

Direkt módszerek

Iterációs módszerek

Sajátértékfeladatok

Általánosított inverz

Mátrixok szinguláris értékek szerinti felbontása

Szinguláris értékek szerinti felbontás (SVD): Minden $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ mátrix előáll

$$A = USV^*$$

alakban, ahol:

$U \in \mathbf{M}_{m\times m}$, $V \in \mathbf{M}_{n\times n}$ ortogonális mátrixok (oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak),

$S \in \mathbf{M}_{m\times n}$ pedig diagonálmátrix (csak a diagonálelemei különbözhetnek zérustól).

S nemzérus diagonálelemei (az A mátrix *szinguláris értékei*) pedig az A^*A mátrix sajátértékeinek pozitív négyzetgyökei.

Mátrixok általánosított inverze

Legyen az $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása $A = USV^*$. Az

$$\boxed{A^+ = VS^+U^* \in \mathbf{M}_{n\times m}}$$

mátrixot az A mátrix *általánosított inverzének* (Moore-Penrose-féle pszeudoinverzének) nevezzük, ahol, ha

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \sigma_3 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}, \qquad \text{akkor} \qquad S^+ := \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & 1/\sigma_2 & & \\ & & 1/\sigma_3 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}$$

Az általánosított inverz egyértelmű, és ha $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$ reguláris, akkor $A^+ = A^{-1}$.

Egyenletrendszerek általánosított megoldása

Az $Ax = b$ egyenletrendszer általánosított megoldása: $\boxed{x^+ := A^+ b}$ (mindig létezik és egyértelmű).

Az $Ax = b$ egyenletrendszer általánosított megoldása minimalizálja az

$$F(x) := \| Ax - b \|^2$$

funkcionált, és ha több ilyen vektor is van, akkor ezek közül a legkisebb normájú (*legkisebb négyzetes megoldás*).

Az $F(x) := \| Ax - b \|^2$ funkcionált minimalizáló w vektorok, és csak azok, kielégítik az

$$A^* A w = A^* b$$

ún. Gauss-féle normálegyenleteket.

Így az általánosított megoldás előállítható valamilyen variációs (iteratív) módszerrel.