Numerikus módszerek 4. Interpolációs problémák

Interpolációs problémák

Egyváltozós interpolációs módszerek

Többváltozós interpolációs módszerek

Interpolációs problémák

Adott $x_1, x_2, ..., x_N \in \mathbf{R}^n$ helyek és azokhoz rendelt $u_1, u_2, ..., u_N \in \mathbf{R}^m$ értékek esetén keressünk olyan $u: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényt, melyre $u(x_k) = u_k \quad (k = 1, 2, ..., N)$ teljesül!

Alkalmazási területek:

- görbeillesztés;
- felületillesztés;
- adathiányok pótlása;
- számítási modellek adatfeltöltése stb.

Ha $n, m > 1$ (vektor-interpolációs problémák), akkor az $x_1, x_2, ..., x_N \in \mathbf{R}^n$ helyekhez rendelt értékek vektorok: ekkor esetleg még egyéb kiegészítő feltételt is szabunk az interpolációs függvényre (vektormezőre), pl: divergenciamentesség, rotációmentesség.

Interpolációs problémák

Egyváltozós interpolációs módszerek

Többváltozós interpolációs módszerek

A Lagrange-interpoláció

Adottak: $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbf{R}$ helyek és az azokhoz rendelt $u_1, u_2, \ldots, u_N \in \mathbf{R}$ értékek.
Keresünk: **legfeljebb (*N* – 1)-edfokú polinomot**, melyre $u(x_k) = u_k \quad (k = 1,2,\ldots,N)$ teljesül!

Lagrange-féle alappolinomok:

$$l_j(x) := \prod_{r \neq j} \frac{x - x_r}{x_j - x_r} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_N)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_N)}$$

Az interpolációs polinom:

$$P_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \cdot l_j(x)$$

A Lagrange-interpolációs polinom egyértelmű.

Ha ui. két (legfeljebb (*N* – 1)-edfokú) interpolációs polinom létezne, pl. P_{N-1} és Q_{N-1}, akkor kettőjük különbségének *N* db zérushelye lenne, ezért $P_{N-1} - Q_{N-1} \equiv 0$.

A Lagrange-interpoláció

A Lagrange-interpolációs polinom együtthatóinak másik kiszámítási módja:

A $P_{N-1}(x)=\sum_{j=1}^{N} a_j \cdot x^{j-1}$ alakból, az interpolációs feltételek figyelembevételével:

$$\boxed{P_{N-1}(x_k)=\sum_{j=1}^{N} a_j \cdot x_k^{j-1}=u_k \qquad (k=1,2,\ldots,N)}$$

Ez egy *N*-ismeretlenes egyenletrendszer. Mátrixelemei: $A_{kj}=x_k^{j-1}$, a mátrix reguláris, így az Lagrange-interpolációs polinom létezik és egyértelmű.

Az Hermite-interpoláció

Adottak: $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbf{R}$ helyek és az azokhoz rendelt $u_k^{(i_k)} \in \mathbf{R} \quad (i_k = 0,1,\ldots,m_k - 1)$ értékek.
Jelölje $m := m_1 + m_2 + \ldots + m_N$. Keresünk: **legfeljebb (*m* – 1)-edfokú** H_{m-1} **polinomot**, melyre:

$$H_{m-1}^{(j)}(x_k) = u_k^{(j)} \quad (j = 0,1,\ldots,m_k - 1, \quad k = 1,2,\ldots,N)$$

teljesül.

Az Hermite-interpolációs polinom létezik, és egyértelmű.

A $H_{m-1}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_j \cdot x^{i-1}$ Hermite-interpolációs polinom együtthatói az alábbi egyenletrend-szerből határozhatók meg:

$$H_{m-1}^{(j)}(x_k) = \sum_{i=1}^{m} a_j \cdot \frac{d^j (x^{i-1})}{dx^j}\Big|_{x=x_k} = u_k^{(j)} \qquad (j = 0,1,\ldots,m_k - 1, \quad k = 1,2,\ldots,N)$$

Speciális esetek:

- mindegyik $m_k = 1$ $\quad \Rightarrow \quad$ Lagrange-interpoláció
- $N = 1, \quad m_1 = m$ $\quad \Rightarrow \quad$ Taylor-polinom

Kétpontos harmadfokú Hermite-interpoláció

Adottak: $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ helyek, és a hozzárendelt u_0, u_1, u_0', u_1' értékek. Legyen $h := x_1 - x_0$, és keressünk harmadfokú $H(x) = A + B \cdot \left(\frac{x - x_0}{h}\right) + C \cdot \left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{x - x_0}{h}\right)^3$ polinomot melyre:

$$
\begin{array}{lcl}
H(x_0) & = A & = u_0 \\
H(x_1) & = A + B + C + D & = u_1 \\
h \cdot H'(x_0) = & B & = h \cdot u_0' \\
h \cdot H'(x_1) = & B + 2C + 3D & = h \cdot u_1'
\end{array}
$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
A = u_0 \\
B = h \cdot u_0' \\
C = -3u_0 + 3u_1 - 2h \cdot u_0' - h \cdot u_1' \\
D = 2u_0 - 2u_1 + h \cdot u_0' + h \cdot u_1'
\end{array}
}
$$

Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

Adottak: $x_0, x_1, ..., x_N \in \mathbf{R}$ helyek, és a hozzájuk rendelt $u_0, u_1, .. u_N, u'_0, u'_1, ..., u'_N$ értékek.

Minden egyes $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumon elkészítjük az $u_{k-1}, u'_{k-1}, u_k, u'_k$ adatokra épülő 2-pontos harmadfokú Hermite-interpolációt. Az egyes részintervallumokon értelmezett polinomok C^1**-folytonosan** csatlakoznak az osztópontokban.

Megjegyzés: az $u'_0, u'_1, ..., u'_N \in \mathbf{R}$ értékek sokszor nem ismertek.

Egy lehetséges megoldás:

$$u'_0 := 0, \quad u'_k := \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \quad (k = 1, \ldots, N-1), \quad u'_N := 0$$

Harmadfokú spline interpoláció

Adottak: $x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbf{R}$ helyek és az azokhoz rendelt $u_0, u_1, \dots, u_N \in \mathbf{R}$ értékek.
Keressünk olyan szakaszonként legfeljebb 3-fokú S polinomot, melyre

$$S(x_k) = u_k \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

teljesül, az egyes részintervallumokon értelmezett polinomok az osztópontokban pedig C^2**-folytonosan** csatlakoznak.

Alapelv: alkalmasan megválasztott $u'_0, u'_1, \dots, u'_N \in \mathbf{R}$ értékek mellett szakaszonként 3-fokú Hermite-interpolációt alkalmazunk.

Az $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumon (jelölje $h_{k-1} := x_k - x_{k-1}$):

$$H_{k-1}(x) = a_0 + a_1 \frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} + a_2 \left(\frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} \right)^2 + a_3 \left(\frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} \right)^3$$

Az $[x_k, x_{k+1}]$ részintervallumon (jelölje $h_k := x_{k+1} - x_k$):

$$H_k(x) = a_0 + a_1 \frac{x - x_k}{h_k} + a_2 \left(\frac{x - x_k}{h_k} \right)^2 + a_3 \left(\frac{x - x_k}{h_k} \right)^3$$

Harmadfokú spline interpoláció

A $H''_{k-1}(x_k) = H''_k(x_k)$ csatlakozási feltételből:

$$\boxed{\frac{1}{h_{k-1}} u'_{k-1} + \left(\frac{2}{h_{k-1}} + \frac{2}{h_k} \right) u'_k + \frac{1}{h_k} u'_{k+1} = -\frac{3}{h_{k-1}^2} u_{k-1} + \left(\frac{3}{h_{k-1}^2} - \frac{3}{h_k^2} \right) u_k + \frac{3}{h_k^2} u_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, N-1)}$$

Ez egy 3-diagonális egyenletrendszer az $u'_1, \ldots, u'_{N-1}$ értékekre.

Speciálisan *ekvidisztáns* alappontok esetén:

$$\boxed{u'_{k-1} + 4u'_k + u'_{k+1} = -\frac{3}{h} u_{k-1} + \frac{3}{h} u_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, N-1)}$$

u'_0, u'_N szabadon választhatók (pl. zérusnak).

A harmadfokú spline az interpolációs feltételeket és az adott u'_0, u'_N peremfeltételt kielégítő sima függvények körében minimalizálja az $F(u) := \int_{x_0}^{x_N} | f''(x) |^2 dx$ funkcionált.

Interpolációs problémák

Egyváltozós interpolációs módszerek

Többváltozós interpolációs módszerek

Többváltozós interpoláció

Adottak: $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbf{R}^2$ helyek és az azokhoz rendelt $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbf{R}$ értékek.
Keresünk: **minél simább *u* függvényt**, melyre $u(x_k) = u_k \quad (k = 1,2,\dots,N)$ teljesül.

Ha az alappontok *téglalaprácson* vannak: $(x_k^{(1)}, x_j^{(2)}) \in \mathbf{R}^2$ a hozzárendelt értékek pedig $u_{k,j}$ $(k = 1,2,\dots,N,\ j = 1,2,\dots,M)$, akkor alkalmazhatunk **kétváltozós Lagrange-interpolációt**.

A Lagrange-féle alappolinomok:

$$l_{k,j}(x) := l_{k,j}(x^{(1)}, x^{(2)}) := \prod_{\substack{p \neq k \\ q \neq j}} \frac{x^{(1)} - x_p^{(1)}}{x_k^{(1)} - x_p^{(1)}} \cdot \frac{x^{(2)} - x_q^{(2)}}{x_j^{(2)} - x_q^{(2)}}$$

Az interpolációs polinom:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} u_{k,j} \cdot l_{k,j}(x)}$$

A Shepard-módszer

Adottak: $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbf{R}^2$ helyek és az azokhoz rendelt $u_1, u_2, \ldots, u_N \in \mathbf{R}$ értékek.

$$\boxed{u(x) := \frac{\sum_{j=1}^{N} u_j w_j(x)}{\sum_{j=1}^{N} w_j(x)}, \qquad w_j(x) := \frac{1}{\| x - x_j \|^2}}$$

Tulajdonságok:

- Numerikusan stabil, egyenletmegoldást nem igényel
- Mérsékelt műveletigény ($O(N^2)$)
- Mérsékelt pontosság

A Shepard-interpolációs függvény mindkét parciális deriváltja eltűnik az összes alappontban.

A radiális bázisfüggvények módszere

Adottak: $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbf{R}^2$ helyek és az azokhoz rendelt $u_1, u_2, \ldots, u_N \in \mathbf{R}$ értékek.

$$\boxed{u(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_j (x - x_j)}$$

ahol $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ adott, gömbszimmetrikus függvények (radiális bázisfüggvények)

Az ismeretlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ együtthatók az **interpolációs egyenletrendszerből** számíthatók:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_j (x_k - x_j) = u_k \qquad (k = 1,2,\ldots,N)}$$

Tulajdonságok:

- Nagyon jó approximációs tulajdonságok
- Egyenletmegoldás szükséges
- Nagyméretű, teljesen kitöltött, rosszul kondícionált mátrixok
- Nagy műveletigény ($O(N^3)$)

A radiális bázisfüggvények módszere

Néhány speciális eset:

Multikvadrikus módszer (method of multiquadrics, MQ):

$$\boxed{\Phi_j(x) := \sqrt{\| x \|^2 + c_j^2}}$$

($c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbf{R}$: adott, skálázó paraméterek)

Vékony lemez módszer (thin plate splines, TPS):

$$\boxed{\Phi_j(x) := \| x \|^2 \log \| x \|}$$

(nincs skálázó paraméter)

Gauss-függvények:

$$\boxed{\Phi_j(x) := e^{-c_j^2 \cdot \|x\|^2}}$$

($c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbf{R}$: adott, skálázó paraméterek)