Numerikus módszerek 5. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Kezdeti és peremérték feladatok

Az Euler-módszer

Az Euler-módszer javításai

Runge-Kutta-módszerek

Lineáris többlépéses módszerek

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Kezdeti érték feladatok

$y'(x) = f(x, y(x)),$	$(x_0 < x < x_0 + A)$
$y(x_0) = y_0$	(*kezdeti feltétel*)

(ahol f adott, kétváltozós függvény, mely kielégíti a Lipschitz-feltételt).

Példa (oldat hígítása). Legyen egy V térfogatú tartály valamilyen vízben oldott anyaggal (pl. sóval). Kezdjünk el folyamatosan, egyenletesen tiszta vizet tölteni a tartályba felül, és hagyjuk a sós vizet alul ugyanilyen ütemben távozni. A tartályban nyilván egyre hígabb lesz a sóoldat.
A hígulás folyamatát akkor az alábbi differenciálegyenlet írja le:

$$c'(t) = -\frac{Q}{V} c(t)$$

ahol $c(t)$ a t időpillanatban érvényes sókoncentráció a tartályban, és Q a hozzáfolyás hozama, (időegység alatt a tartályba beáramló víz mennyisége (térfogata)).
Kezdeti feltétel:

$$c(0) = c_0$$

ahol c_0 a kezdeti (a $t = 0$ időpillanatban érvényes) sókoncentráció.

Peremérték feladatok

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad (x_0 < x < x_1)$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \qquad (\textit{peremfeltételek})$$

(ahol f adott, háromváltozós függvény, mely kielégíti a Lipschitz-feltételt).
Peremfeltételként a deriváltértékek is előírhatók a perempontokban, vagy az érték és a derivált adott lineáris kombinációja is.

Példa (elektromos áram vezetőben). Tekintsünk egy vékony, hosszú, de nem feltétlen mindenütt ugyanolyan vastagságú és/vagy anyageloszlású elektromos vezetékdarabot. Kapcsoljunk áramforrást a vezeték két végpontjára. Az elektromos feszültség eloszlását a vezeték hossza mentén ekkor az alábbi differenciálegyenlet írja le:

$$(\sigma \cdot (U')' = 0$$

ahol $U(x)$ az elektromos potenciál a vezeték x pontjában, $\sigma(x)$ a relatív vezetőképesség ugyanitt.
A peremfeltételek pl:

$$U(x_0) = U_0, \quad U(x_1) = U_1$$

ahol U_0, U_1 a potenciál a vezeték két végpontjában.

Kezdeti érték feladatok megoldási elvei

Hasznos segédeszközök:
Taylor-formula egyváltozós függvényekre:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k$$

Taylor-formula kétváltozós függvényekre:

$$f(x+h, y+\delta) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\delta\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}h\delta + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\delta^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}h^2\delta + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}h\delta^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\delta^3\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(\binom{k}{0}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k}h^k + \binom{k}{1}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^{k-1}\partial y}h^{k-1}\delta + \ldots + \binom{k}{k}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial y^k}\delta^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^{k-j}\partial y^j}h^{k-j}\delta^j$$

Számítási rács: $x_k := x_0 + kh \quad (k = 0,1,\ldots,N)$, ahol h a **lépésköz**.
Cél: az y megoldás értékeinek közelítése a rácspontokban.

1. A deriváltak közelítése véges differenciákkal
Elsőrendű derivált:

- Előrelépő séma: $\boxed{y'(x_k) \sim \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}}$ Hibája: $O(h)$,

  mert a Taylor-formulából: $y_{k+1} = y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y_k + y'(x_k)h + O(h^2)$
- Visszalépő séma: $\boxed{y'(x_k) \sim \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h}}$ Hibája: $O(h)$,

  mert a Taylor-formulából: $y_{k-1} = y(x_{k-1}) = y(x_k - h) = y_k - y'(x_k)h + O(h^2)$
- Centrális séma: $\boxed{y'(x_k) \sim \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}}$ Hibája: $O(h^2)$,

  mert a Taylor-formulából $y_{k+1} = y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y_k + y'(x_k)h + \dfrac{1}{2}y''(x_k)h^2 + O(h^3)$

  és hasonlóan: $y_{k-1} = y(x_{k-1}) = y(x_k - h) = y_k - y'(x_k)h + \dfrac{1}{2}y''(x_k)h^2 + O(h^3)$

Másodrendű derivált:

- Centrális séma: $\boxed{y''(x_k) \sim \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2}}$ Hibája: $O(h^2)$,

  mert a Taylor-formulából:

  $$y_{k+1} = y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y_k + y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + O(h^4)$$

  $$y_{k-1} = y(x_{k-1}) = y(x_k - h) = y_k - y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + O(h^4)$$

  Összeadva a két egyenlőséget, az állítás adódik.

2. A differenciálegyenlet integrálásával

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$$

és a jobb oldali integrált egy közelítő integrálformulával helyettesítjük.

Példa (trapézformula alkalmazása): $y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2} \cdot (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$

Numerikus módszerek 5. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Kezdeti és peremérték feladatok

Az Euler-módszer

Az Euler-módszer javításai

Runge-Kutta-módszerek

Lineáris többlépéses módszerek

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Az Euler-módszer

Modellfeladat:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad (x_0 < x < x_0 + A)$$
$$y(x_0) = y_0 \qquad (\textit{kezdeti feltétel})$$

Számítási rács: ekvidisztáns, h lépésközű: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$.

A megoldás deriváltját a rácspontokban elsőrendű véges differenciákkal közelítjük.

Explicit séma (előrelépő séma használata):

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} := f(x_k, y_k) \quad \Rightarrow \quad y_{k+1} := y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \qquad (k = 0,1,\ldots,N-1)$$

Implicit séma (visszalépő séma használata):

$$y'(x_{k+1}) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} := f(x_{k+1}, y_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad y_{k+1} := y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1}) \qquad (k = 0,1,\ldots,N-1)$$

Konzisztencia, stabilitás, konvergencia

A ***lokális hibatagok***: $g_i := \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i, y(x_i)) \qquad (i = 0,1,\ldots,N-1)$

Egy módszer ***p-edrendben konzisztens***, ha $g_i = O(h^p)$ (i-től függetlenül).

A ***globális hibatagok***: $e_i := y(x_i) - y_i \qquad (i = 0,1,\ldots,N-1)$

Egy módszer ***p-edrendben konvergens***, ha $e_i = O(h^p)$ (i-től függetlenül).

Azt mondjuk, hogy egy módszer ***stabil***, ha a globális hiba a lokális hibával becsülhető felülről:

$$|e_i| \le C \cdot \left(|e_0| + h \sum_{j=0}^{i-1} |g_j| \right) \qquad (i = 0,1,\ldots,N-1)$$

Ha egy módszer p-edrendben konzisztens, és stabil, akkor p-edrendben konvergens is.

Az Euler-módszer elsőrendben konvergens.

Numerikus módszerek 5. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Kezdeti és peremérték feladatok

Az Euler-módszer

Az Euler-módszer javításai

Runge-Kutta-módszerek

Lineáris többlépéses módszerek

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Az Euler-módszer javításai

Az eredeti differenciálegyenletet átírjuk a következő alakba:

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx$$

Trapézformula: Használva az $\int_a^b F(x)dx \approx (b-a)\cdot\frac{F(a)+F(b)}{2}$ integrálközelítő formulát:

$$y_{k+1} := y_k + \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\right)$$

Másképp felírva:

$$\overset{*}{y}_{k+1} := y_k + h\cdot f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} := y_k + \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \overset{*}{y}_{k+1}\right)$$

A módszer *másodrendben* konzisztens.

Érintőformula: Használva az $\int_a^b F(x)dx \approx (b-a)\cdot F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ integrálközelítő formulát:

$$y_{k+1} := y_k + h\cdot f(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k))$$

Másképp felírva:

$$y_{k+1/2} := y_k + \frac{h}{2}\cdot f(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} := y_k + h\cdot f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$$

A módszer *másodrendben* konzisztens.

Az aszimptotikus stabilitás öröklődése

Tekintsük az

$$y' = -Ay$$

modellfeladatot ($A > 0$), melynek azonosan 0 megoldása *aszimptotikusan stabil* (tetszőleges y megoldásra teljesül, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, mivel $y(x) = y(0) \cdot e^{-Ax}$)

Legyen most h rögzített, és vizsgáljuk, hogy a közelítő megoldásra $y_k \to 0$ mikor teljesül.

Explicit Euler-módszer: $y_{k+1} := y_k - Ahy_k$

Az aszimptotikus stabilitás nem minden h mellett öröklődik (**feltételes stabilitás**), mert

$$y_k = y_{k-1} - Ahy_{k-1} = (1 - Ah)y_{k-1} = (1 - Ah)^2 y_{k-2} = \ldots = (1 - Ah)^k y_0 .$$

Így $y_k \to 0$ akkor teljesül minden y_0 mellett, ha $|1 - Ah| < 1$, azaz $-1 < 1 - Ah < 1$.
Az aszimptotikus stabilitás tehát akkor öröklődik, ha

$$\boxed{0 < h < \frac{2}{A}}$$

Implicit Euler-módszer: $y_{k+1} := y_k - Ahy_{k+1}$

Az aszimptotikus stabilitás minden pozitív h mellett öröklődik (**feltétel nélküli stabilitás**), mert $y_k := y_{k-1} - Ahy_k$ miatt:

$$\boxed{y_k = \frac{1}{1+Ah} y_{k-1} = \frac{1}{(1+Ah)^2} y_{k-2} = \ldots = \frac{1}{(1+Ah)^k} y_0}$$

Így $y_k \to 0$ minden (pozitív) h mellett teljesül.

A pozitivitás megőrzése

Tekintsük az

$$y' = -Ay$$

modellfeladatot ($A > 0$), melynek minden pozitív kezdeti feltételhez tartozó megoldása mindenütt pozitív (mert $y(x) = y(0) \cdot e^{-Ax}$).

Legyen most *h* rögzített, és vizsgáljuk, hogy a közelítő megoldásra $y_k > 0$ mikor teljesül, ha $y_0 > 0$.

Explicit Euler-módszer: $y_{k+1} := y_k - Ahy_k$

A pozitivitás nem őrződik meg minden *h* mellett, mert

$$y_k = y_{k-1} - Ahy_{k-1} = (1 - Ah)y_{k-1} = (1 - Ah)^2 y_{k-2} = \ldots = (1 - Ah)^k y_0 .$$

Így $y_k > 0$ akkor teljesül minden $y_0 > 0$ mellett, ha $0 < 1 - Ah < 1$.
A pozitivitás tehát akkor őrződik meg, ha

$$\boxed{0 < h < \frac{1}{A}}$$

Implicit Euler-módszer: $y_{k+1} := y_k - Ahy_{k+1}$

A pozitivitás minden pozitív *h* mellett megőrződik, mert $y_k := y_{k-1} - Ahy_k$ miatt:

$$\boxed{y_k = \frac{1}{1+Ah} y_{k-1} = \frac{1}{(1+Ah)^2} y_{k-2} = \ldots = \frac{1}{(1+Ah)^k} y_0}$$

Így $y_k > 0$ minden (pozitív) *h* mellett teljesül.

Numerikus módszerek 5. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Kezdeti és peremérték feladatok

Az Euler-módszer

Az Euler-módszer javításai

Runge-Kutta-módszerek

Lineáris többlépéses módszerek

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Runge-Kutta-módszerek

$$
\begin{aligned}
k_1 &:= f(x_i, y_i) \\
k_2 &:= f(x_i + h \cdot a_2, y_i + h \cdot b_{21} k_1) \\
k_3 &:= f(x_i + h \cdot a_3, y_i + h \cdot b_{31} k_1 + h \cdot b_{32} k_2) \\
&\ldots \\
k_s &:= f(x_i + h \cdot a_s, y_i + h \cdot b_{s1} k_1 + h \cdot b_{s2} k_2 + \ldots + h \cdot b_{s,s-1} k_{s-1}) \\
y_{i+1} &:= y_i + h \cdot (c_1 k_1 + c_2 k_2 + \ldots + c_s k_s)
\end{aligned}
$$

Egy-egy konkrét módszert jellemző paraméterek:

$$
\begin{aligned}
& s \\
& a_2, a_3, \ldots, a_s \\
& b_{21}; \quad b_{31}, b_{32}; \quad b_{41}, b_{42}, b_{43}; \quad \ldots \quad b_{s1}, b_{s2}, \ldots, b_{s,s-1} \\
& c_1, c_2, \ldots, c_s
\end{aligned}
$$

A paraméterek úgy választandók meg, hogy a **képlethiba** tagjai, a $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \sum_{j=1}^{s} c_j k_j$ számok $O(h^p)$ nagyságrendűek legyenek, ahol p adott szám (a módszer **rendje**).

Speciális Runge-Kutta-módszerek

Elsőrendű Runge-Kutta-módszer: megegyezik az Euler-módszerrel.

Másodrendű Runge-Kutta-módszerek: az érintő- ill. a trapézformulával javított Euler-módszerek.

Egy harmadrendű Runge-Kutta-módszer:

$$k_1 := f(x_i, y_i), \qquad k_2 := f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1), \qquad k_3 := f(x_i + h, y_i - h \cdot k_1 + 2h \cdot k_2)$$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Egy negyedrendű Runge-Kutta-módszer:

$$k_1 := f(x_i, y_i), \qquad k_2 := f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 := f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2), \qquad k_4 := f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3)$$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Runge-Kutta-módszerek rendje

Adott s paraméter mellett az elérhető legmagasabb rend:

$$p = \begin{cases} = s & (s = 1,2,3,4) \\ \leq s - 1 & (s = 5,6,7) \\ \leq s - 2 & (s = 8,9) \\ \leq s - 3 & (s \geq 10) \end{cases}$$

Numerikus módszerek 5. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Kezdeti és peremérték feladatok

Az Euler-módszer

Az Euler-módszer javításai

Runge-Kutta-módszerek

Lineáris többlépéses módszerek

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Lineáris többlépéses módszerek

A lineáris k-lépéses módszerek általános alakja:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{i+j}, y_{i+j}) \qquad (i = 0,1,\ldots,N-k)$$

y_0 a kezdeti feltételből adott; $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$ meghatározása teljesen különálló módszerrel kell, hogy történjék (pl. egy Runge-Kutta-módszer segítségével). Ez az **induló eljárás** feladata.

Egy-egy konkrét módszert jellemző paraméterek:

$$k, \quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \quad \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k \qquad (\text{ahol } \alpha_k \neq 0),$$

melyekkel definiáljuk a módszerre jellemző polinomokat:

$$\rho(z) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \qquad \sigma(z) := \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j$$

Konzisztencia

A paraméterek úgy választandók meg, hogy a **képlethiba** tagjai, azaz a

$$g_i := \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y(x_{i+j}) - \sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_{i+j}, y(x_{i+j}))$$

számok $O(h^p)$ nagyságrendűek legyenek, ahol p adott szám (a módszer **rendje**).

A módszer rendje (legalább) p, ha a következő feltételek valamelyike teljesül:

(a) $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_p = 0,$

ahol $C_0 := \sum_{j=0}^{k}\alpha_j$, $C_1 := \frac{1}{1!}\sum_{j=0}^{k} j\alpha_j - \frac{1}{0!}\sum_{j=0}^{k}\beta_j$, $C_2 := \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{k} j^2\alpha_j - \frac{1}{1!}\sum_{j=0}^{k} j\beta_j, \ldots,$

$$C_p := \frac{1}{p!}\sum_{j=0}^{k} j^p\alpha_j - \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{k} j^{p-1}\beta_j \quad (\textit{hibakonstansok})$$

(b) a $\rho(z)/\sigma(z)$ racionális törtfüggvény a $z = 1$ hely körül a (komplex változós) logaritmus-függvényt (p +1)-edrendben közelíti, azaz $\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} = \log z + O((z-1)^{p+1})$.

Stabilitás és konvergencia

A módszer stabil, ha a ρ polinom kielégíti a *gyökkritériumot*, azaz ha minden gyökének abszolút értéke legfeljebb 1, és minden 1 abszolút értékű gyöke csak egyszeres gyök.
Ekkor, amennyiben a módszer rendje p, a módszer p-edrendben konvergens is.

Ha a ρ polinom kielégíti a gyökkritériumot, akkor az elérhető legmagasabb rend:
$p \le k+2$ ha k páros, ill. $p \le k+1$, ha k páratlan. (*Dahlquist tétele*)

Adams-típusú lineáris *k*-lépéses módszerek

$$\rho(z) = z^k - z^{k-1}$$

Explicit, k-adrendű módszerek (Adams-Bashforth-módszerek):

$k = 1$:

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$k = 2$:

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{2}(3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

$k = 3$:

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}(23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2}))$$

$k = 4$:

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{24}(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3}))$$

Adams-típusú lineáris *k*-lépéses módszerek

$$\rho(z) = z^k - z^{k-1}$$

Implicit, $(k+1)$*-edrendű módszerek* (Adams-Moulton-módszerek):

$k = 1$:

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{2}(f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i))$$

$k = 2$:

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}(5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

$k = 3$:

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{24}(9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2}))$$

Numerikus módszerek 5. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Kezdeti és peremérték feladatok

Az Euler-módszer

Az Euler-módszer javításai

Runge-Kutta-módszerek

Lineáris többlépéses módszerek

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Peremérték feladatok másodrendű differenciálegyenletekre

Modellfeladat: Legyen σ mindenütt pozitív, q mindenütt nemnegatív adott függvény:

$$-(\sigma(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \qquad (0 < x < 1)$$
$$u(0) = a, \quad u(1) = b$$

Számítási rács: $x_k := kh \quad (k = 0,1,\ldots,N)$, ahol h a lépésköz: $h := 1/N$. A másodrendű tag közelítése centrális sémával történik:

$$(\sigma u')'(x_k) \sim \frac{1}{h}\left(\sigma_{k+1}\frac{u_{k+1}-u_k}{h} - \sigma_k\frac{u_k-u_{k-1}}{h}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\sigma_{k+1}u_{k+1} - (\sigma_{k+1}+\sigma_k)u_k + \sigma_k u_{k-1}\right)$$

u_0, u_N adottak; a többi u_k egy lineáris egyenletrendszer megoldásával kapható:

$$-\sigma_k u_{k-1} + (\sigma_{k+1} + \sigma_k + h^2 q_k)u_k - \sigma_{k+1}u_{k+1} = h^2 f_k \qquad (k = 1,2,\ldots,N-1)$$

Az egyenletrendszer mátrixa 3-átlós (sőt, ha mindegyik q_k pozitív, akkor diagonálisan domináns is), így a megoldás gazdaságosan elvégezhető ($O(N)$ műveletigénnyel).