Numerikus módszerek 6. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása

Vektoranalízis, összefoglaló

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Módszerek elliptikus egyenletekre

Módszerek időfüggő egyenletekre

Vektoranalízis, összefoglaló. Differenciáloperátorok

Legyen $u:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenciálható *skalárfüggvény*, $E:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ differenciálható *vektorfüggvény*.

Az u függvény **gradiense:** $\operatorname{grad} u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ (vektorfüggvény)

Az $E := (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ függvény **divergenciája:** $\operatorname{div} E := \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial E_n}{\partial x_n}$ (skalárfüggvény)

Az $E := (E_1, E_2, E_3)$ függvény **rotációja:** $\operatorname{rot} E := \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)$ (vektor)

A **Laplace-operátor**: $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ (skalárfüggvény)

- $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv 0$
- $\operatorname{div} \operatorname{rot} E \equiv \mathbf{0}$
- $\operatorname{div} \operatorname{grad} u \equiv \Delta u$
- $\operatorname{div}(E \cdot u) = (\operatorname{div} E) \cdot u + E \cdot (\operatorname{grad} u)$

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Gauss-féle divergenciatétel: $\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, d\Omega = \oint_{\Gamma} E \cdot n \, d\Gamma$

Következménye: $\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma$

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Gauss-féle divergenciatétel: $\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, d\Omega = \oint_{\Gamma} E \cdot n \; d\Gamma$

Következménye: $\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma$

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, d\Omega = \oint_{\Gamma} (\operatorname{grad} u) \cdot n \, d\Gamma = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma$$

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Green 1. tétele: $$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega = -\int_{\Omega} (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Green 1. tétele: $$\int_\Omega (\Delta u) v \, d\Omega = -\int_\Omega (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} v)\, d\Omega + \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$

Legyen $E := (\operatorname{grad} u)\cdot v$, akkor

$$\operatorname{div} E = \operatorname{div}((\operatorname{grad} \mathrm{u}) v) = (\operatorname{div} \operatorname{grad} u) v + (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} v) = (\Delta u) v + (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} v).$$

A Gauss-tételt alkalmazva:

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, d\Omega = -\int_\Omega (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} v)\, d\Omega + \int_\Omega \operatorname{div}((\operatorname{grad} u) v)\, d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} v)\, d\Omega + \oint_\Gamma (\operatorname{grad} u) v \cdot n \, d\Gamma = -\int_\Omega (\operatorname{grad} u)\cdot(\operatorname{grad} v)\, d\Omega + \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Green 2. tétele: $$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega - \int_{\Omega} (\Delta v) u \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} u \, d\Gamma$$

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Green 2. tétele: $$\int_\Omega (\Delta u) v \, d\Omega - \int_\Omega (\Delta v) u \, d\Omega = \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \oint_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} u \, d\Gamma$$

Az 1. Green formula szerint:

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, d\Omega = -\int_\Omega (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) \, d\Omega + \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$

u és v szerepcseréjével:

$$\int_\Omega (\Delta v) u \, d\Omega = -\int_\Omega (\operatorname{grad} v) \cdot (\operatorname{grad} u) \, d\Omega + \oint_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} u \, d\Gamma$$

Kivonva ezt az előző egyenlőségből, az állítás adódik.

Vektoranalízis, összefoglaló. Integrálátalakítási tételek

Green 3. tétele (2D-ben):

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{(x-y)\cdot n_y}{\|x-y\|^2}u(y)\,d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\log\|x-y\|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\,d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\log\|x-y\|\,\Delta u(y)\,d\Omega_y$$

Megjegyzés: a $\boxed{V(y) := \log\|x-y\|}$ függvény $y \neq x$ esetén mindenütt harmonikus, azaz $\Delta V \equiv 0$.

Numerikus módszerek 6. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása

Vektoranalízis, összefoglaló

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Módszerek elliptikus egyenletekre

Módszerek időfüggő egyenletekre

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Elliptikus egyenletek: $\boxed{\Delta u = f}$ (**Poisson-egyenlet**; ha $f = 0$, akkor **Laplace-egyenlet**)

Általánosabb elliptikus egyenlet: $\boxed{\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} u = f}$

(Stacionárius hővezetés; elektromos árameloszlás; szivárgás; szélkeltette áramlás sekély tavakban)

Konvekció-diffúzió-reakcióegyenlet: $\boxed{\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u - \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} u + d \cdot u = f}$

(Stacionárius transzportfolyamatok; szennyezőanyagterjedés folyadékokban, gázokban)

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Parabolikus egyenletek: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f}$ (**diffúziós egyenlet**)

Általánosabb parabolikus egyenlet: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} u = f}$

Konvekciós-diffúziós egyenlet: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u - \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} u = f}$

(Transzportfolyamatok; szennyezőanyagterjedés folyadékokban, gázokban)

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Hiperbolikus egyenletek: $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f}$ (**hullámegyenlet**)

(Hullámterjedés)

Mellékfeltételek elliptikus egyenletekre: peremfeltételek

- u előírása a tartomány peremén (**1. vagy Dirichlet-féle peremfeltétel**)
- $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ előírása a tartomány peremén (**2. vagy Neumann-féle peremfeltétel**)
- u és $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ egy lineáris kombinációjának előírása a tartomány peremén (**3. vagy Robin-féle peremfeltétel**)

A perem egyes darabjain akár különböző típusú peremfeltétel is tehető (**kevert peremfeltétel**).

Szabad felszín probléma

Mellékfeltételek parabolikus és hiperbolikus egyenletekre: kezdeti- és peremfeltételek

Térváltozók szerint: peremfeltételek (időfüggő is lehet)

Idő szerint: kezdeti feltétel

- parabolikus egyenletek esetén: u előírása egy $t = t_0$ időpillanatban
- hiperbolikus egyenletek esetén: u és $\frac{\partial u}{\partial t}$ előírása egy $t = t_0$ időpillanatban

A mellékfeltételekkel ellátott parciális differenciálegyenletnek (általában) egyértelmű megoldásuk létezik.

Numerikus módszerek 6. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása

Vektoranalízis, összefoglaló

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Módszerek elliptikus egyenletekre

Módszerek időfüggő egyenletekre

Módszerek elliptikus egyenletekre.
A Fourier-módszer a Poisson-egyenletre

Modellfeladat: $\boxed{-\Delta u = f}$ a $(0,a)\times(0,b)\subset \mathbf{R}^2$ téglalapon, $\boxed{u := 0}$ a peremen.

1.lépés: Fejtsük szinuszos Fourier-sorba a jobboldali *f* függvényt:

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{kj} \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

A Fourier-együtthatók:

$$c_{kj} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dydx$$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
A Fourier-módszer a Poisson-egyenletre

2.lépés: A fenti Fourier-együtthatókkal készítsük el az alábbi szinuszos Fourier-sort:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{kj}}{\frac{k^2\pi^2}{a^2}+\frac{j^2\pi^2}{b^2}} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}}$$

Az így nyert u függvény megoldása a modellfeladatnak.

Módszerek elliptikus egyenletekre.
A Fourier-módszer a Poisson-egyenletre

2.lépés: A fenti Fourier-együtthatókkal készítsük el az alábbi szinuszos Fourier-sort:

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{kj}}{\frac{k^2\pi^2}{a^2}+\frac{j^2\pi^2}{b^2}}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}}$$

Az így nyert u függvény megoldása a modellfeladatnak.

$$\Delta\left(\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\frac{k\pi x}{a}\right)\sin\frac{j\pi y}{b}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sin\frac{j\pi y}{b}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}=\left(-\frac{k^2\pi^2}{a^2}-\frac{j^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

ezért

$$-\Delta u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{kj}}{\frac{k^2\pi^2}{a^2}+\frac{j^2\pi^2}{b^2}}\cdot\left(\frac{k^2\pi^2}{a^2}+\frac{j^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_{kj}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}=f(x,y)$$

A téglalap peremén pedig $u=0$, mert itt $\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}=0$.

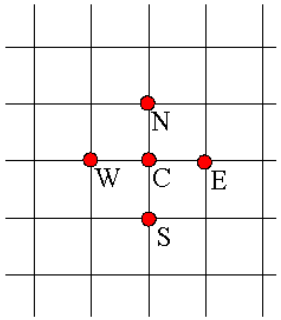
Módszerek elliptikus egyenletekre.
A Fourier-módszer a Poisson-egyenletre

Megjegyzések:

- A Fourier-sorfejtés és Fourier-sor-kiértékelés realizálása FFT-vel történhet.
- Csak téglalaptartomány esetén használható (hasonló módszer vezethető le még más nagyon speciális tartományokra pl. körre).
- Csak Poisson-egyenlet esetén használható (hasonló módszer vezethető le még más nagyon speciális differenciálegyenletre).

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Véges differencia módszerek

Modellfeladat: $-\Delta u = f$ egy $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományon, u előírt a peremen.



Alapötlet: Borítsuk le a tartományt derékszögű egyenközű ráccsal, és a rácspontokban a deriváltakat közelítsük véges differencia sémákkal.

A Laplace-operátor közelítése **ötpontos centrális sémával**:

$$\boxed{(\Delta u)_C \sim \frac{u_E - 2u_C + u_W}{h^2} + \frac{u_N - 2u_C + u_S}{h^2} = \frac{u_N + u_W + u_S + u_E - 4u_C}{h^2}}$$

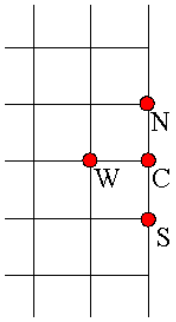
Így a C rácspontra felírt diszkrét egyenlet:

$$\boxed{4u_C - u_N - u_W - u_S - u_E = h^2 f_C}$$

mely érvényes minden, a tartomány belsejében fekvő rácspontra. A tartomány peremére eső rácspontokban u előírt (peremfeltétel).

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Véges differencia módszerek

A $\dfrac{\partial u}{\partial n} = v$ Neumann-peremfeltétel diszkretizálása:



Naiv megoldás (a közelítés csak elsőrendű): $\boxed{\dfrac{\partial u_C}{\partial n} \sim \dfrac{u_C - u_W}{h}}$,

innen a C perempontra: $\boxed{u_C - u_W = h \cdot v_C}$

Javított (másodrendű) közelítés: $\boxed{4u_C - 2u_W - u_N - u_S = h^2 f_C + 2hv_C}$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Véges differencia módszerek

$$u_W = u_C - \frac{\partial u_C}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_C}{\partial x^2} h^2 + O(h^3), \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial^2 u_C}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_C}{\partial y^2} - f_C, \text{ innen}$$

$$u_W = u_C - \frac{\partial u_C}{\partial x} h - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_C}{\partial y^2} h^2 - \frac{1}{2} f_C h^2 + O(h^3)$$

$\frac{\partial^2 u_C}{\partial y^2}$-t centrális sémával közelítve: $\frac{\partial^2 u_C}{\partial y^2} = \frac{u_N - 2u_C + u_S}{h^2} + O(h^2)$:

$$u_W = u_C - \frac{\partial u_C}{\partial x} h - \frac{1}{2}(u_N - 2u_C + u_S) - \frac{1}{2} f_C h^2 + O(h^3)$$

ahonnan:

$$\frac{\partial u_C}{\partial x} = \frac{u_C - u_W}{h} - \frac{u_N - 2u_C + u_S}{2h} - \frac{1}{2} f_C h + O(h^2)$$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Véges differencia módszerek

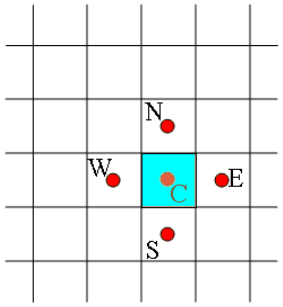
Numerikus jellemzők:

- A rendszer nagyméretű, de mátrixa **ritka mátrix.**
- Direkt módszerek: nagyon műveletigényesek.
- Egyszerű iterációs módszerek: általában lassúak.
- A perem közelítése durva.

A megoldandó fő probléma: az egyenletrendszer ***gyors*** megoldása.

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Véges térfogat módszerek

Modellfeladat: $-\Delta u = f$ egy $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományon, u előírt a peremen



Alapötlet: Borítsuk le a tartományt egy **cellarendszerrel**, és integráljuk az egyenletet minden egyes C cellán:

$$\int_C \Delta u \, d\Omega = \int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_C$$

Ezekután már csak a normális irányú deriváltnak az egyes cellaoldalak mentén vett integráljait (a **fluxusokat**) kell közelíteni pl. cella-középponti differencia-sémákkal:

$$\int_C \Delta u \, d\Omega = -\int_C f \, d\Omega \sim -h^2 f_C$$

$$\int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_C \sim \frac{u_N - u_C}{h} h + \frac{u_W - u_C}{h} h + \frac{u_S - u_C}{h} h + \frac{u_E - u_C}{h} h = u_N + u_W + u_S + u_E - 4u_C$$

Így a C cellára felírt diszkrét egyenlet: $\boxed{4u_C - u_N - u_W - u_S - u_E = h^2 f_C}$, mely érvényes minden, a tartomány belsejében fekvő cellára. A tartomány peremére illeszkedő cellákban u előírt (peremfeltétel).

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Véges térfogat módszerek

- A módszer nagyméretű, ritka mátrixú egyenletrendszert ad. Ennek gyors megoldása problematikus. De:
- Nem feltétlen szükséges téglalapcellákat alkalmazni, így jobban lehet a peremre illeszkedni.
- Csak elsőrendű deriváltakat (fluxusokat) kell közelíteni, másodrendűeket nem.
- A Neumann-peremfeltétel diszkretizálása sokkal egyszerűbb.

Ha pl. a *C* cella keleti oldala a peremre illeszkedik, és ott $\frac{\partial u}{\partial n} = v_E$ előírt, akkor a keleti cellaoldalra vett fluxus számítható.

$$\int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_C \sim \frac{u_N - u_C}{h} h + \frac{u_W - u_C}{h} h + \frac{u_S - u_C}{h} h + v_E h = u_N + u_W + u_S - 3u_C + v_E h$$

A *C* cellára felírt diszkrét egyenlet:

$$\boxed{3u_C - u_N - u_W - u_S = h^2 f_C + v_E h}$$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Multigrid módszerek

Modellfeladat (lineáris): $Au = f$
Ekvivalens (iterációra alkalmas) formában: $u = Bu + g$
Általában ez egy egyszerű Jacobi- vagy Seidel-iterációt értelmez.

Alapötletek:

- többszintű diszkretizálás
- simítás (Jacobi- vagy Seidel-iterációval)
- javítás a *maradékegyenlet* alapján:

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Multigrid módszerek

Modellfeladat (lineáris): $Au = f$
Ekvivalens (iterációra alkalmas) formában: $u = Bu + g$
Általában ez egy egyszerű Jacobi- vagy Seidel-iterációt értelmez.

Alapötletek:

- többszintű diszkretizálás
- simítás (Jacobi- vagy Seidel-iterációval)
- javítás a *maradékegyenlet* alapján:

Legyen $\tilde{u}$ egy közelítő megoldása az $Au = f$ egyenletnek. Akkor a pontos u megoldás előáll $u = \tilde{u} + w$ alakban, ahol w javító tag megoldása a **maradékegyenletnek**:

$$Aw = f - A\tilde{u}$$

Ha w meghatározása nem pontos, akkor így a megoldás egy újabb közelítését kapjuk.

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Kéthálós módszer

Legyen X_H egy H lépésközű (durva) háló, X_h pedig egy h lépésközű (finom) háló.

Diszkretizált feladatok: $A_h u_h = f_h$ ill. $A_H u_H = f_H$
hasonlóan: $u_h = B_h u_h + g_h$ ill. $u_H = B_H u_H + g_H$.

Az egyes hálók közti *átvitelek*: $R : X_h \to X_H$ (leszűkítés a durva hálóra),
$P : X_H \to X_h$ (kiterjesztés a finom hálóra)

A kéthálós algoritmus lépései:

- Elősimítás: $\tilde{u}_h := B_h \tilde{u}_h + g_h$ végrehajtása néhányszor
- Durvahálós korrekció: $\tilde{u}_h := \tilde{u}_h + P w_H$, ahol $A_H w_H = R(f_h - A_h \tilde{u}_h)$
- Utósimítás: $\tilde{u}_h := B_h \tilde{u}_h + g_h$ végrehajtása néhányszor

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Többhálós módszerek

Legyenek $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_L$ egymásba ágyazott hálók (X_1 a legdurvább. X_L a legfinomabb).

Diszkretizált feladatok: $A_k u_k = f_k$
hasonlóan: $u_k = B_k u_k + g_k \quad (k = 1,2,\ldots,L)$

Az egyes hálók közötti átvitelek: $R_k : X_k \to X_{k-1}$ (leszűkítések)
$P_k : X_{k-1} \to X_k$ (kiterjesztések).

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Többhálós módszerek

Legyenek $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_L$ egymásba ágyazott hálók (X_1 a legdurvább. X_L a legfinomabb).

Diszkretizált feladatok: $A_k u_k = f_k$
hasonlóan: $u_k = B_k u_k + g_k \quad (k = 1,2,\ldots,L)$

Az egyes hálók közötti átvitelek: $R_k : X_k \to X_{k-1}$ (leszűkítések)
$P_k : X_{k-1} \to X_k$ (kiterjesztések).

Kaszkád módszer:

Lemegyünk a legdurvább szintre, és ott pontosan megoldjuk a feladatot:

$$\tilde{u}_1 := A_1^{-1} f_1$$

A finomabb szinteken csak az előző szintről áthozott megoldásokat javítjuk:

$\tilde{u}_k := P_k \tilde{u}_{k-1}$ (áthozatal)
$\tilde{u}_k := B_k \tilde{u}_k + g_k$ (simítás, néhányszor) $(k = 2,3,\ldots,L)$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Többhálós módszerek

Legyenek $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_L$ egymásba ágyazott hálók (X_1 a legdurvább. X_L a legfinomabb).

Diszkretizált feladatok: $A_k u_k = f_k$
hasonlóan: $u_k = B_k u_k + g_k \quad (k = 1,2,\ldots,L)$

Az egyes hálók közötti átvitelek: $R_k : X_k \to X_{k-1}$ (leszűkítések)
$P_k : X_{k-1} \to X_k$ (kiterjesztések).

Multigrid ciklus (MGC): iteratív javítás
Teljes multigrid algoritmus (FMG): nem iteratív

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Többhálós módszerek

Multigrid ciklus rekurzív definíciója:

A legdurvább szinten pontosan megoldjuk a feladatot:

$$\tilde{u}_1 := MGC(1, \tilde{u}_1, f_1) := A_1^{-1} f_1$$

A finomabb szinteken:

- áthozatal az előző szintről: $\tilde{u}_k := P_k \tilde{u}_{k-1}$
- elősimítás: $\tilde{u}_k := B_k u_k + g_k$ végrehajtása néhányszor
- maradék kiszámítása: $r_k := f_k - A_k \tilde{u}_k$
- multigrid ciklus végrehajtása (csak 1-szer vagy kétszer (V-ciklus ill. W-ciklus)) a maradékegyenletre az eggyel durvább hálón: $w_{k-1} := MGC(k-1, w_{k-1}, R_k r_k)$. A kezdeti közelítés lehet 0.
- durvahálós korrekció: $\tilde{u}_k := \tilde{u}_k + P_k w_{k-1}$
- utósimítás: $MGC(k, \tilde{u}_k, f_k) := B_k \tilde{u}_k + g_k$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Többhálós módszerek

Teljes multigrid algoritmus rekurzív definíciója:

A legdurvább szinten pontosan megoldjuk a feladatot:

$$\tilde{u}_1 := FMG(1, f_1) := A_1^{-1} f_1$$

A finomabb szinteken:

- $\tilde{u}_k := P_k(FMG(k-1, f_{k-1}))$
- $FMG(k, f_k) := MGC(k, \tilde{u}_k, f_k))$

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Multigrid módszerek

Megjegyzések:

- A simítás feladata: a hiba *nagyfrekvenciás komponenseinek* erőteljes csökkentése (nem a gyors konvergencia). A hiba alacsonyfrekvenciás komponenseit a durvahálós korrekció csökkenti.

- Műveletigény: az ismeretlenek számának ***első*** hatványával arányos

- Általánosítható nemlineáris feladatokra is (Full Approximation Scheme)

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Variációs módszerek, véges elem módszerek

Modellfeladat: $-\Delta u = f$ egy $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományon, $u \equiv 0$ a peremen.

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ adott *bázisfüggvények*, és $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ adott *tesztfüggvények*., melyek szintén eltűnnek a peremen.

Keressük a megoldást $u := \sum_{j=1}^{N} u_j \cdot \varphi_j$ alakban. Mindkét oldalt ψ_k-val szorozva és integrálva:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} u_j \cdot \int_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi_j \cdot \operatorname{grad} \psi_k \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot \psi_k \, d\Omega \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)}$$

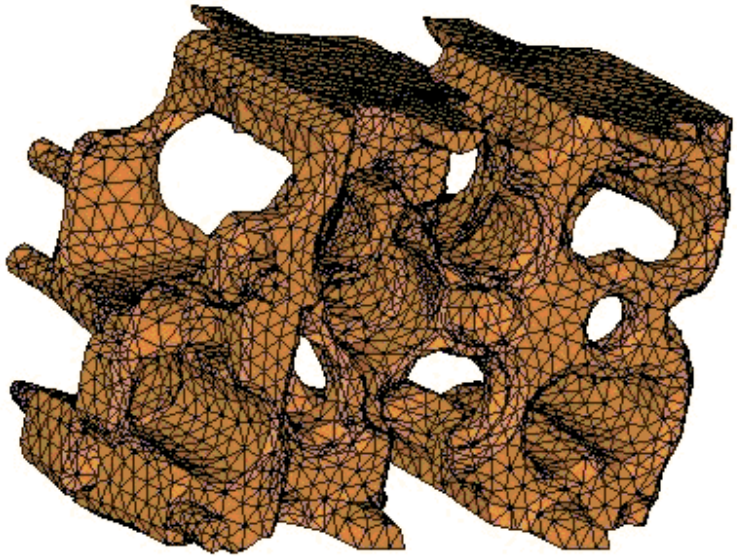
Másodrendű deriváltak nem fordulnak elő!

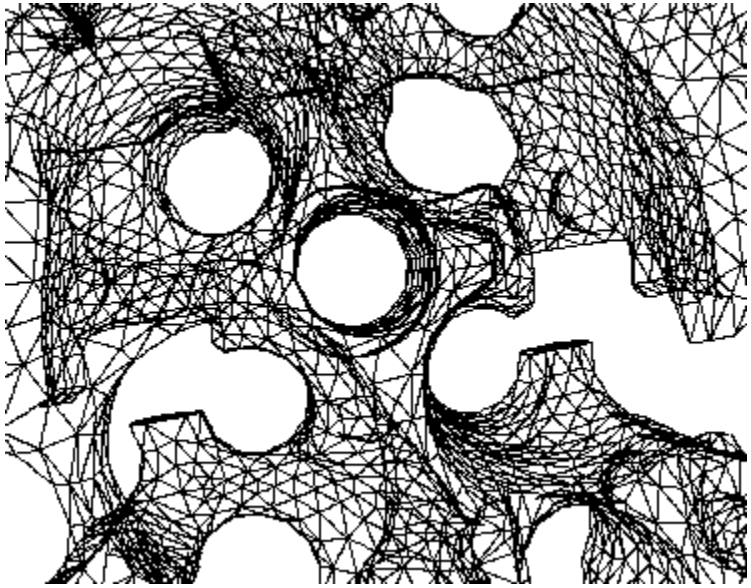
Módszerek elliptikus egyenletekre.
Variációs módszerek, véges elem módszerek

Numerikus jellemzők:

- A rendszer nagyméretű, de mátrixa **ritka mátrix** (a bázis- és a tesztfüggvényeket alkalmasan megválasztva)
- Direkt módszerek: nagyon műveletigényesek.
- A perem közelítése kellően finom lehet.
- Az elemstruktúra létrehozása azonban külön probléma.

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Variációs módszerek, véges elem módszerek





Módszerek elliptikus egyenletekre.
A perem-integrálegyenlet módszer

Modellfeladat: $\Delta U = f$ egy $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományon
Kevert peremfeltétel:

U előírt a perem egy Γ_1 részén;

a perem fennmaradó Γ_2 részén a $\partial U / \partial n$ normális irányú derivált adott

3.Green-formula: jelölje $u := U|_\Gamma$, $v := \dfrac{\partial U}{\partial n}|_\Gamma$, akkor minden *belső* ($\Omega$-beli) z pontban:

$$\boxed{U(z) = -\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{(z-y)\cdot n_y}{\| z-y \|^2} u(y)\, d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \log \| z-y \| \cdot v(y)\, d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \log \| z-y \| \cdot f(y)\, d\Omega_y}$$

A jobb oldal tagjai: *kettősréteg potenciál*, *egyszerű réteg potenciál*, *logaritmikus potenciál*.

Alapötlet: Legyen $x \in \Gamma$ egy **perem**pont; $z \to x$ mellett kiszámítjuk mindkét oldal limeszét, így egy *integrál*egyenletet kapunk, melyben az ismeretlen függvények (u és v) csak a peremen értelmezettek.

A perem-integrálegyenlet módszer

A logaritmikus és az egyszerű réteg potenciál folytonosak *z* szerint.

Ha *u* folytonos, akkor a kettősréteg potenciál limesze:

$$\lim_{z \to x} \oint_{\Gamma} \frac{(z-y)\cdot n_y}{\| z-y \|^2} u(y)\, d\Gamma_y = \oint_{\Gamma} \frac{(x-y)\cdot n_y}{\| x-y \|^2} u(y)\, d\Gamma_y - u(x)\cdot(2\pi - \alpha(x))$$

ahol $\alpha(x)$ a perem belső törésszöge az *x* perempontban.

A perem-integrálegyenlet módszer

Az u és v peremfüggvények kielégítik az alábbi **perem-integrálegyenletet**:

$$\alpha u + Ku - Rv = -Lf$$

ahol

$$(Ku)(x) := \oint_{\Gamma} \frac{(x-y)\cdot n_y}{\| x-y \|^2} u(y)\, d\Gamma_y ,$$

$$(Rv)(x) := \oint_{\Gamma} \log \| x-y \| \, v(y)\, d\Gamma_y , \qquad (Lf)(x) := \int_{\Omega} \log \| x-y \| \, f(y)\, d\Omega_y$$

A perem-integrálegyenlet módszer

Az u és v peremfüggvények kielégítik az alábbi **perem-integrálegyenletet**:

$$\alpha u + Ku - Rv = -Lf$$

ahol

$$(Ku)(x) := \oint_{\Gamma} \frac{(x-y)\cdot n_y}{\| x-y \|^2} u(y)\, d\Gamma_y ,$$

$$(Rv)(x) := \oint_{\Gamma} \log \| x-y \| \, v(y)\, d\Gamma_y , \qquad (Lf)(x) := \int_{\Omega} \log \| x-y \| \, f(y)\, d\Omega_y$$

Elvégezve ui. a $z \to x$ határátmenetet:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{(x-y)\cdot n_y}{\| x-y \|^2} u(y)\, d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi} u(x)\cdot(2\pi - \alpha(x)) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \log \| x-y \| \, v(y)\, d\Gamma_y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log \| x-y \| \, f(y)\, d\Omega_y$$

és innen a perem-integrálegyenlet már adódik.

A perem-integrálegyenlet numerikus megoldása kollokációs módszerrel

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ adott peremfüggvények, $x_1, x_2, \ldots x_N$ adott perempontok (*kollokációs pontok*). (Legegyszerűbb választás: a peremet rácspontokkal N részre bontjuk, és φ_k legyen az a függvény, mely a k-adik szakaszon azonosan 1, másutt zérus).

Keressük u-t és v-t ezen függvények lineáris kombinációjaként:

$$\boxed{u \sim \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j, \quad v \sim \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j}$$

Ezeket a perem-integrálegyenletbe helyettesítve, és az egyenlőséget az $x_1, x_2, \ldots x_N$ perempontokban megkövetelve, az ismeretlen együtthatókra lineáris egyenletrendszert nyerünk:

$$\boxed{\alpha_k u_k + \sum_{j=1}^{N} K_{kj} u_j - \sum_{j=1}^{N} R_{kj} v_j = -Lf(x_k) \qquad (K_{kj} := (K\varphi_j)(x_k), \quad R_{kj} := (R\varphi_j)(x_k))}$$

$(k = 1, 2, \ldots, N)$

Ez N db egyenlet. A peremfeltételek további N egyenletet adnak.

A perem-integrálegyenlet módszer
Numerikus jellemzők

- A perem-integrálegyenlet (közelítő) megoldása csak peremen elhelyezett rácspontokat igényel. A tartomány diszkretizálása nem szükséges.

- Diszkretizálás után a kapott egyenletrendszer mérete sokkal kisebb, mint véges differencia módszer alkalmazása esetén, de a rendszer mátrixa teljesen kitöltött mátrix és általában nem szimmetrikus.

- A multigrid technika itt is alkalmazható, és ez tovább csökkenti a műveletigényt.

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Az alapmegoldások módszere

Modellfeladat: $\Delta U = 0$ egy $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományon
Kevert peremfeltétel:

U előírt a perem egy Γ_1 részén;

a perem fennmaradó Γ_2 részén a $\partial U / \partial n$ normális irányú derivált adott

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N$ adott külső pontok (*forráspontok*)
$x_1, x_2, \ldots, x_M \in \Gamma_1$, $x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots, x_N \in \Gamma_2$ adott perempontok (*kollokációs pontok*).

$$\Phi(x) := \frac{1}{2\pi} \log \| x \| \quad \text{(alapmegoldás), akkor} \quad \Delta\Phi = 0$$

$$U(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi(x - \tilde{x}_j)$$

Az ismeretlen együtthatók a peremfeltételekből számíthatók:

Módszerek elliptikus egyenletekre.
Az alapmegoldások módszere

$$U(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi(x - \tilde{x}_j)$$

Az ismeretlen együtthatók a peremfeltételekből számíthatók:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi(x_k - \tilde{x}_j) = U(x_k) && (k = 1,2,\ldots,M) \\ &\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x_k - \tilde{x}_j) = \frac{\partial U}{\partial n_k}(x_k) && (k = M+1, M+2,\ldots,N) \end{aligned}}$$

Az alapmegoldások módszere
Numerikus jellemzők

- A módszer csak peremen elhelyezett kollokációs pontokat és külső forráspontokat igényel. A tartomány diszkretizálása nem szükséges.

- Rendkívül egyszerűen programozható.

- Az egyenletrendszer mátrixa teljesen kitöltött mátrix és általában nem szimmetrikus.

- Az egyenletrendszer mátrixa általában nagyon rosszul kondícionált: minél távolabb vannak a forráspontok a peremtől, annál rosszabbul kondícionált a mátrix.

Numerikus módszerek 6. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása

Vektoranalízis, összefoglaló

Parciális differenciálegyenletek és mellékfeltételek

Módszerek elliptikus egyenletekre

Módszerek időfüggő egyenletekre

Módszerek időfüggő egyenletekre.
A Fourier-módszer

Modellfeladat:	$\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f$	a $(0,a)\times(0,b)\subset \mathbf{R}^2$ téglalapon
Peremfeltétel:	$u := 0$ a peremen (minden $t>0$ esetén).	
Kezdeti feltétel:	$u(0,x,y) = u_0(x,y)$.	

1.lépés: Fejtsük szinuszos Fourier-sorba a jobboldali *f* függvényt minden $t>0$ esetén:

$$f(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{kj}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

2.lépés: Fejtsük szinuszos Fourier-sorba a kezdeti feltételt is:

$$u_0(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

3.lépés: Keressük a megoldást is szinuszos Fourier-sor alakban, egyelőre ismeretlen Fourier-együtthatókkal:

$$\boxed{u(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} u_{kj}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}}$$

Módszerek időfüggő egyenletekre.
A Fourier-módszer

Behelyettesítve a feltételezett megoldást a differenciálegyenletbe:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(u'_{kj}(t) + D(\frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{j^2\pi^2}{b^2})u_{kj}(t) \right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

Az egyenlet megoldását nyerjük, ha az u_{kj} Fourier-együtthatófüggvények kielégítik az alábbi *közönséges* differenciálegyenletet és kezdeti feltételt:

$$\boxed{\begin{aligned} & u'_{kj}(t) + D(\frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{j^2\pi^2}{b^2})u_{kj}(t) = c_{kj}(t) \\ & u_{kj}(0) = a_{kj} \end{aligned}}$$

Speciálisan, ha a c_{kj} függvények konstansok (a jobboldali *f* függvény nem függ az időtől):

$$u_{kj}(t) = \frac{c_{kj}}{D\cdot\lambda_{kj}} + \left(a_{kj} - \frac{c_{kj}}{D\cdot\lambda_{kj}} \right)e^{-D\cdot t\cdot\lambda_{kj}} \qquad \left(\lambda_{kj} := \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{j^2\pi^2}{b^2} \right)$$

Ez esetben a kezdeti feltétel hatása gyorsan lecseng, és a megoldás tart a $\boxed{-D\Delta u = f}$ Poisson-egyenlet megoldásához.