Szent István Egyetem Állatorvos-tudományi Kar
Biomatematikai és Számítástechnikai Tanszék

9. előadás

Valószínűség-számítás

Fodor János
Biomatematika 2001

Copyright © 2001 jfodor@univet.hu
Last Revision Date: October 30, 2001 Version 1.10

Table of Contents

1 Valószínűség-számítás – alapvető fogalmak **5**

2 A valószínűség **13**

2.1 Valószínűségi modellek 14

- A tapasztalati valószínűségi modell 17
- A klasszikus valószínűség 19

2.2 A valószínűség alapvető szabályai . . 22

- A biztos és a lehetetlen esemény valószínűsége 22

- Két egymást kizáró esemény uniójának valószínűsége 23
- Az ellentett esemény valószínűsége 25
- Két esemény uniójának valószínűsége 30

3 Feltételes valószínűség, függetlenség 34

3.1 Bayes tétele 40

3.2 Események függetlensége 45

4 Valószínűségi változók 48

5 Valószínűségi változók eloszlása 52

6 Valószínűségi változók függetlensége 55

7 Diszkrét valószínűségi változók 57

7.1 Diszkrét valószínűségi változó várható értéke 58

7.2 A medián és a módusz 61

7.3 A variancia és a szórás 62

7.4 A várható érték és a variancia tulajdonságai 69

1. Valószínűség-számítás – alapvető fogalmak

Egy természeti jelenség lehet

- **determinisztikus**: azonos körülmények között mindig ugyanúgy játszódik le; a feltételek ismeretében a jelenség további jellemzői egyértelműen meghatározottak (pl. a szabadesés törvénye, Ohm törvénye, stb.)
- **sztochasztikus** vagy **véletlen**: a jelenség kimenetele (lényegében azonos körülmények között is) nem egyértelmű (például, egy pénzdarab feldobásakor, a lottóhúzásnál, kockadobásnál).

Ezen utóbbiak tanulmányozása a célunk most. Kezdjük néhány alapvető fogalommal.

Populáció: azon egyének (dolgok) összessége, akikről (amikről) információt szeretnénk kapni.

Kísérlet: vagy tényleges kísérlet (tehát ellenőrzött feltételek között végzett reprodukálható vizsgálat), vagy empirikus megfigyelés.

A kísérlet eredményét véletlen tényezők befolyásolják (amiket nem kívánunk vagy nem tudunk figyelembe venni).

Elemi esemény: egy kísérlet lehetséges kimenetele.

Eseménytér: az elemi események halmaza.

Jele: Ω.

Példa.

(1) (a) Egy szabályos pénzérmét egyszer feldobunk.

Az eseménytér:

$$\Omega_1 := \{\textbf{fej, írás}\}.$$

(diszkrét, véges halmaz)

(b) A pénzérmét kétszer dobjuk fel. Ekkor

$$\Omega_2 := \{ff, fi, if, ii\}.$$

(c) A pénzérmét háromszor dobjuk fel. Ekkor

$$\Omega_3 := \{fff, ffi, fif, iff, fii, ifi, iif, iii\}.$$

(d) A pénzérmét az első fej megjelenéséig dobáljuk. Ekkor

$$\Omega = \{f, if, iif, iiif, \ldots\}.$$

(végtelen, de megszámlálható)

(2) Figyeljük meg egy bizonyos cég által gyártott izzók élettartamát. Az eseménytér **a nemnegatív valós számok összessége** (végtelen, nem megszámlálható).

Esemény: Ω tetszőleges részhalmaza.

Ezért az események között alkalmazhatók a halmazműveletek (unió, metszet, komplementer).

Szokás eseményekkel kapcsolatban az alábbi jelölés is (például a jegyzetben):

$$A \cup B \text{ helyett } A + B,$$

$$A \cap B \text{ helyett } AB.$$

Mivel az események halmazok, ezért nem használjuk ezt a külön jelölést.

Azt mondjuk, hogy egy kísérlet során az A **esemény bekövetkezett**, ha a kísérlet kimenetele mint elemi esemény eleme az A halmaznak.

A fenti (1c) példában egy A esemény: a hármas sorozatban nincs fej; nyilván $A = \{iii\}$. Egy másik: pontosan két fej van; ez éppen $\{ffi, fif, iff\}$.

Biztos esemény: Ω; **Lehetetlen esemény**: $\emptyset$.

Azt mondjuk, hogy az A_1 esemény **maga után vonja** az A_2 eseményt, ha valahányszor A_1 bekövetkezik, bekövetkezik A_2 is (vagyis $A_1 \subset A_2$).

Egymást kölcsönösen kizáró események: ha közülük valamelyik bekövetkezik, akkor ezzel egyidejűleg semelyik másik esemény nem következhet be.

Ennek megfelelően az A_1 és A_2 esemény egymást kizárja, ha $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (diszjunkt részhalmazok).

Teljes eseményrendszer: események olyan összessége, amelyek közül mindig **pontosan egy** következik be.

Formálisabban: az $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ ha } i \neq j$$

és

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszerhez tartozó halmazok az eseménytér egy **partícióját** adják.

2. A valószínűség

A valószínűség-számításban abból indulunk ki, hogy egy kísérlettel kapcsolatos bármely eseményhez egy szám van hozzárendelve: az esemény valószínűsége. Ez egy 0 és 1 közti szám, amely annak esélyét fejezi ki, hogy a kérdéses esemény be fog következni.

- Minél közelebb van egy valószínűség 0-hoz, annál kevésbé tartjuk elképzelhetőnek az esemény bekövetkezését.
- Minél közelebb van egy valószínűség 1-hez, annál

biztosabbak vagyunk abban, hogy a hozzá tartozó esemény bekövetketik.

- A 0 és 1 közé eső valószínűséget (pl.7/10, 0.27, 1/2) néha százalékként fejezzük ki (70%, 27%, or 50%).

2.1. Valószínűségi modellek

Példa.

Amikor egy jeggyel rendelkező utas megérkezik a repülőtérre, elképzelhető, hogy mégsem utazhat, mert több jegyet adtak el, mint ahány ülés van a gépen.

Két dolog történhet (két lehetséges kimenetel):

1. el tud repülni (van hely a gépen);
2. egy későbbi járattal kell repülnie (nincs hely a gépen).

Mielőtt kiér a reptérre, nem lehet biztos abban, hogy a két lehetőség közül melyik következik be. Mi annak a valószínűsége, hogy nem lesz hely a járaton?

Tegyük fel, hogy az utas szubjektív becslése erre a valószínűségre **0.1**. Mivel ez a valószínűség 0-hoz közeli, ezek szerint az utas úgy gondolja, hogy igen

kicsi annak az esélye, hogy lemarad a járatról. A válasza a helyzet szubjektív megítélésén alapult, a mondott becslés pedig **szubjektív valószínűség**.

Ha csak lehet (és az előadáson és gyakorlaton mindig lehet), ehelyett az alábbi két modell valamelyikét használjuk inkább.

- **A tapasztalati valószínűségi modell**

Relatív gyakoriság szerinti valószínűség: Sokszor megfigyelünk egy történést vagy sokszor megismétlünk egy kísérletet, és egy eseményhez a megfigyelt relatív gyakoriság szerint rendelünk hozzá valószínűséget.

Ezek alapján

Egy esemény valószínűsége =

$$\frac{\text{Ahányszor az esemény bekövetkezett}}{\text{Az összes megfigyelés száma}}.$$

Példa.

Kérdés, hogy egy a sajtóból jól ismert bűnügyben a gyanúsított bűnös vagy sem? Megkérdeztek erről 500 egyetemistát. Közülük 275 szerint bűnös a gyanúsított. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott egyetemista szerint a gyanúsított bűnös?

Alkalmazhatjuk az előző formulát, amely szerint

$$P(\textbf{bűnös}) = 275/500 = 0.55.$$

- **A klasszikus valószínűség**

A **klasszikus valószínűség** azon a feltevésen alapul, hogy egy kísérlet véges sok kimenetelének mindegyike **egyformán valószínű**.

Ezek szerint

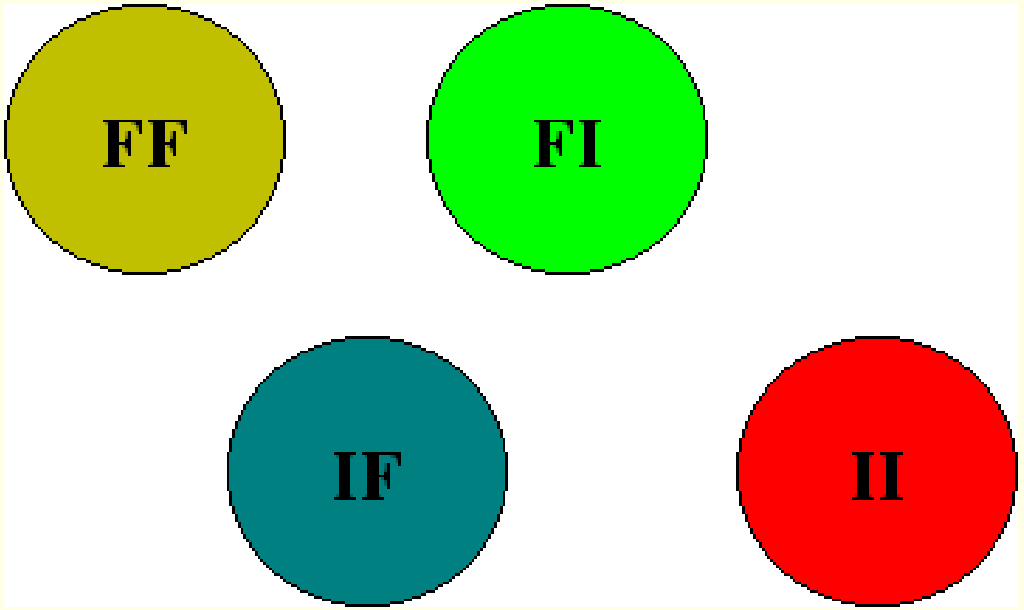
Egy esemény valószínűsége =

$$\frac{\text{A kedvező kimenetelek száma}}{\text{Az összes kimenetel száma}}.$$

Példa.

Dobjunk fel egy érmét kétszer. Az eseménytér ekkor $\Omega_2 = \{FF, FI, IF, II\}$. Tekintsük azt az eseményt, hogy egy fej jött ki. Ekkor ennek valószínűsége $= 2/4 = 1/2$.

Ebben a kísérletben a négy elemi esemény (lehetséges kimenetel) közül pontosan egy következik be.



Mivel mindegyik kimenetel valószínűsége $1/4$, ezért az összes valószínűség összege $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1$.

2.2. A valószínűség alapvető szabályai

- **A biztos és a lehetetlen esemény valószínűsége**

Magától értetődik, hogy a biztos esemény (Ω), illetve a lehetetlen esemény ($\emptyset$) valószínűségére

$$\boxed{P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0.}$$

- **Két egymást kizáró esemény uniójának valószínűsége**

Ha az A és B események **egymást kizárják**, akkor annak valószínűsége, hogy **vagy** A **vagy** B bekövetkezik, egyenlő a két esemény valószínűségének összegével. Formulával:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad \textbf{ha } A \cap B = \emptyset.$$

Példa.

A MALÉV egy jelentésében az alábbi információ

található a Budapest – New York járatukról:

Érkezés	Gyakoriság
Korán	100
Időben	800
Később	75
Törölve	25
Összesen	1000

Legyen A az az esemény, hogy egy járat **korábban** érkezik meg. Ekkor $P(A) = 100/1000 = 0.1$.

Legyen B az az esemény, hogy egy járat **késik**. Ekkor $P(B) = 75/1000 = 0.075$.

Vegyük észre, hogy A és B egymást kizáró események.

Mi annak a valószínűsége, hogy egy járat **vagy korábban ér oda, vagy késik**?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.1 + 0.075 = 0.175.$$

- **Az ellentett esemény valószínűsége**

Legyen $P(A)$ az A esemény valószínűsége, $P(\bar{A})$ pedig az A **ellentett** (vagy komplementer) eseményének valószínűsége.

Egy esemény ellentettjének valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy 1-ből kivonjuk az esemény valószínűségét:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Természetesen ekkor $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ is teljesül.

Példa. (folyt.)

Érkezés	Gyakoriság
Korán	100
Időben	800
Később	75
Törölve	25
Összesen	1000

Legyen C az az esemény, hogy a járat **pontos**. Ekkor $P(C) = 800/1000 = 0.8$.

Legyen D az az esemény, hogy a járatot **törlik**. Ekkor $P(D) = 25/1000 = 0.025$.

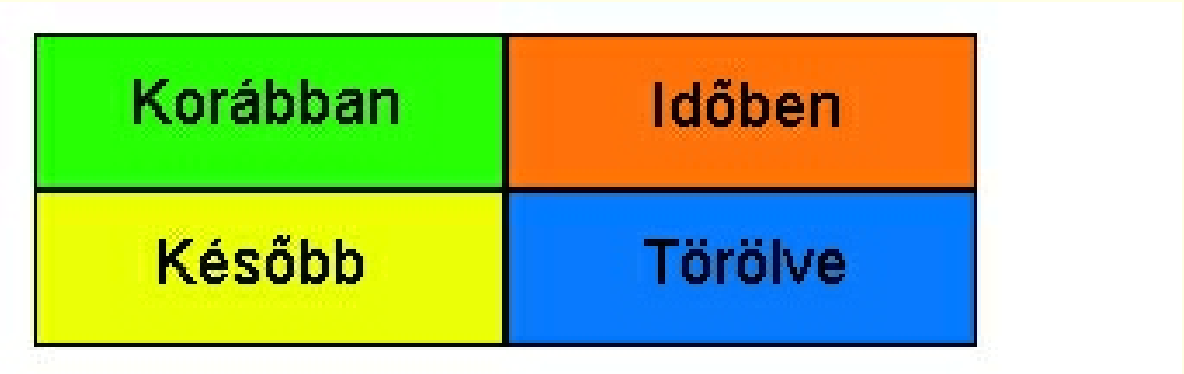
Nyilvánvaló, hogy a C és D események egymást

kizárják.

Használjuk most egy esemény ellentettjére vonatkozó szabályt annak kimutatására, hogy a korábbi érkezés vagy késés valószínűsége 0.175.

Most $P(A \cup B) = 1 - P(C \cup D) = 1 - [0.8 + 0.025] = 0.175$.

Az alábbi Venn diagramm illusztrálja ezt az esetet.



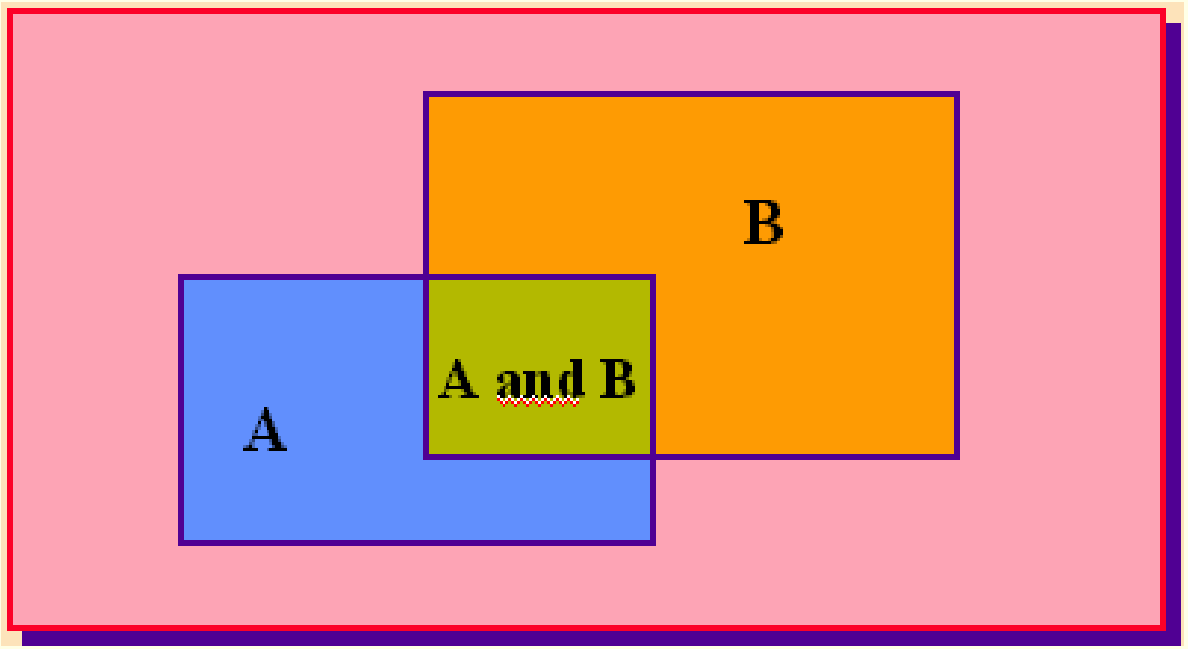
A most megismert szabály nagyon fontos, mivel sok esetben könnyebben ki tudjuk számolni egy esemény ellentettjének a valószínűségét, mint direkt módon az eseményét. Erre a gykorlaton látnak majd példát.

- **Két esemény uniójának valószínűsége**

Legyen A és B két esemény, amely nem feltétlenül zárja ki egymást. Ekkor a $P(A \cup B)$ valószínűséget az alábbi formula adja meg:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Az alábbi Venn-diagram illusztrálja ezt a szabályt.

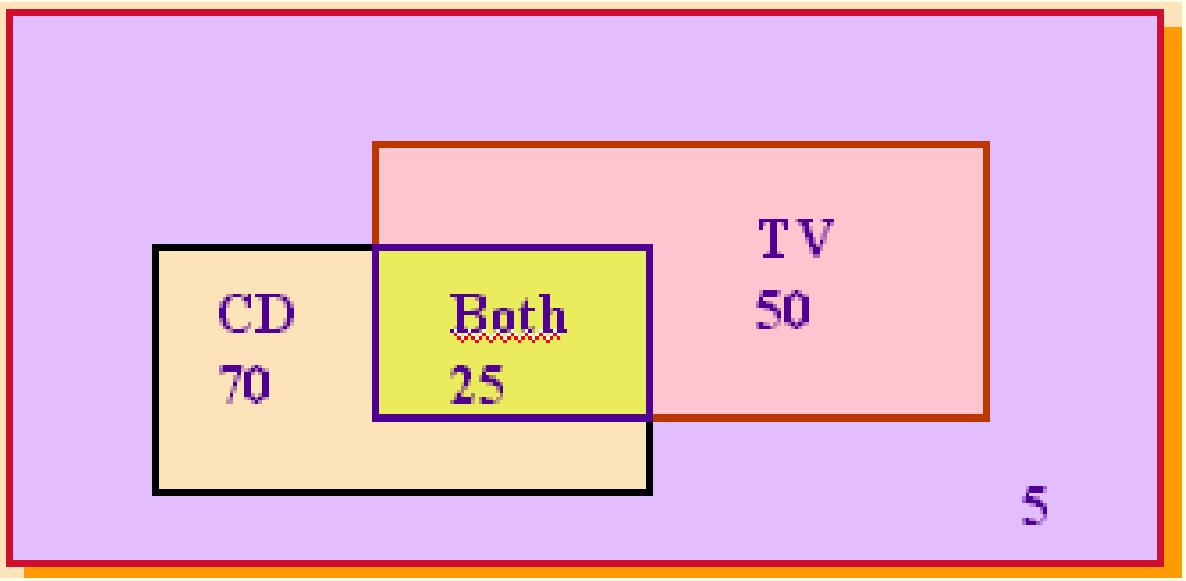


Példa.

Megkérdeztek 150 egyetemi hallgatót arról, hogy szobájukban van-e CD-lejátszó és TV. Közülük 70 mondta, hogy **csak** CD-lejátszója van, 50 mondta,

hogy **csak** TV-je van, és 25 mondta, hogy **mind-kettő** van a szobájában.

Az alábbi Venn-diagram illusztrálja ezt a példát.



He egy egyetemistát véletlenszerűen kiválasztunk,

mennyi a valószínűsége, hogy **csak** CD-lejátszója van? **Csak** TV-je? **Mindkettő**?

Legyen C az az esemény, hogy a hallgatónak van CD-lejátszója, T pedig az az esemény, hogy van TV-je. Ekkor

- $P(C) = 70/150 = 0.4667$,
- $P(T) = 50/150 = 0.3333$,
- $P(C \cap T) = 25/150 = 0.1667$.

Ha véletlenszerűen válsztunk egy hallgatót, men-

nyi annak valószínűsége, hogy **vagy CD-lejátszója, vagy TV-je** van? (Ebbe azt is beleértjük, amikor mindkettő van neki.)

Mivel $P(C \cup T) = P(C) + P(T) - P(C \cap T)$, ezért

$$P(C \cup T) = 0.4667 + 0.3333 - 0.1667 = 0.6333.$$

3. Feltételes valószínűség, függetlenség

Ez annak a valószínűsége, hogy egy esemény bekövetkezik, ha **tudjuk**, hogy egy másik esemény bekövetkezett.

Példa.

Minden nap ébredéskor megfigyeljük az időjárást. Jelölje A azt az eseményt, hogy **esik**, B pedig azt, hogy **felhős az ég**.

Tegyük fel, hogy az összes napot tekintve, azok **10 százaléka felhős és esős** (vagyis: $P(A \cap B) = 0.1$), és a napok **30 százaléka felhős** (azaz $P(B) = 0.3$).

Ha holnap felkelünk, és azt tapasztaljuk, hogy az ég felhős, mennyi a valószínűsége annak, hogy ugyanakkor esni is fog?

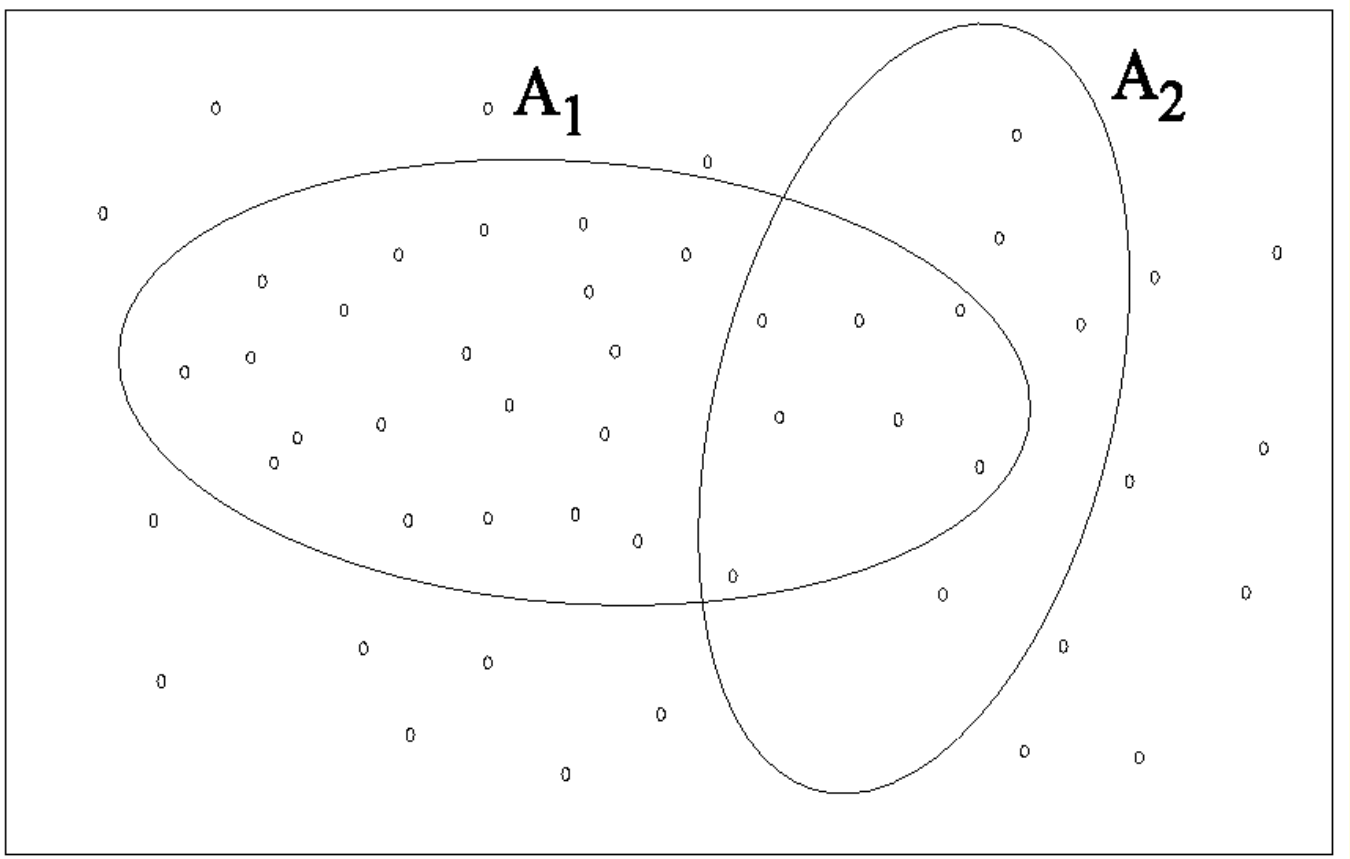
Józan paraszti ész alapján: a felhős napok harmada esős, tehát a kérdéses valószínűség: $1/3$.

Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűségét** $P(A|B)$ jelöli, melynek értelmezése:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

feltéve, hogy $P(B) \neq 0$.

Más szóval, $P(A|B)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy A bekövetkezik, feltéve, hogy B bekövetkezett.



Példa.

Egy egyetemi kar dékánja a következő adatokat gyűjtötte össze a hallgatókról:

Szak	Férfi	Nő	Összesen
Könyvelés	120	80	200
Pénzügy	110	70	180
Marketing	70	50	120
Vezetéstud.	110	100	210
Statisztika	50	10	60
Informatika	140	90	230
Összesen	600	400	1000

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgató **könyvelés szakos nő**?

Legyen K az az esemény, hogy **könyvelés szakos**, és N az az esemény, hogy **nő**. Az alábbi valószínűséget kell kiszámítanunk: $P(K \cap N)$.

Nyilván $P(K \cap N) = 80/1000$.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy hölgyet választunk? Nyilván $P(N) = 400/1000$.

Most tudjuk, hogy a kiválasztott személy hölgy; mennyi a valószínűsége, hogy könyvelés szakos?

Most $P(K|N)$-et kell kiszámítanunk. Mivel

$$P(K|N) = \frac{P(K \cap N)}{P(N)},$$

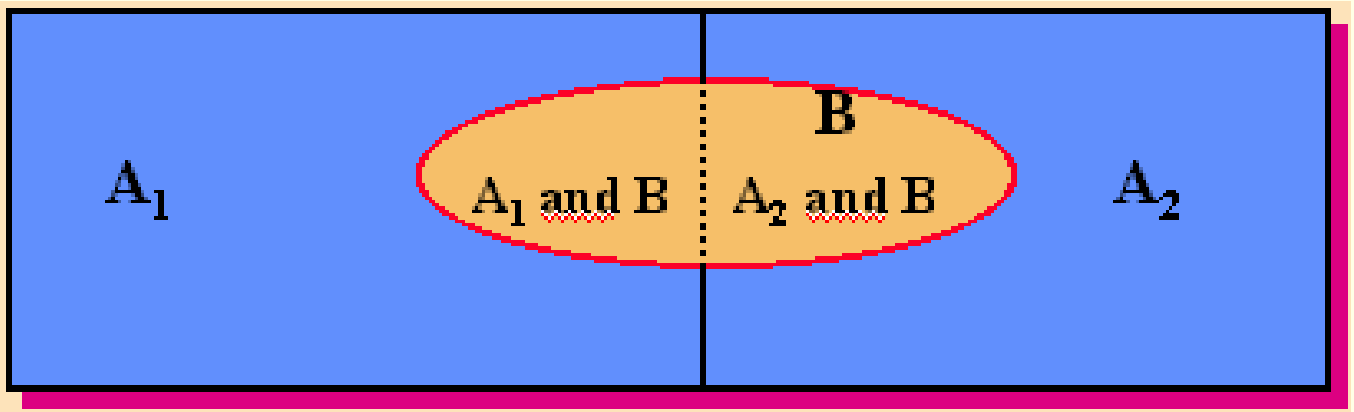
ezért

$$P(K|N) = [80/1000]/[400/1000] = 0.2.$$

3.1. Bayes tétele

Tekintsük a következő diagramot, ahol az eseményteret kék szín jelöli. Ebben teljes eseményrendszert alkot az A_1 és A_2 esemény: az eseménytér egy

partícióját adják.



Mivel $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$, ezért

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1|B) \cdot P(B).$$

Hasonlóan,

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2|B) \cdot P(B).$$

Másrészt,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B).$$

Ezekből kapjuk a következő eredményt.

Bayes tétele

Ha A_1 és A_2 teljes eseményrendszer és B tetszőleges esemény, akkor

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)}.$$

A Bayes tételben szereplő mindhárom esemény pozitív valószínűségű kell legyen.

A tétel állítása kettőnél több eseményből álló partícióra is érvényes.

Példa.

Egy palackos borokat forgalmazó cég mostanában sok reklamációt kap amiatt, hogy a palackokban az előírtnál kevesebb bor van (alultöltöttek a palackok). Ma érkezett a legújabb reklamáció, de a termelési igazgató nem tudja eldönteni, hogy a két palackozóüzemük (A és B) közül melyikben töltötték

a palackot. Mennyi annak valószínűsége, hogy az alultöltött palackot az A üzemben töltötték?

Legyen U az az esemény, hogy egy palack alultöltött. Az adatok:

	Termelés (%)	Alultöltés (%)
A	55	3
B	45	4

Így tehát

$$P(A|U) = \frac{0.55 \cdot 0.03}{0.55 \cdot 0.03 + 0.45 \cdot 0.04} = 0.4783.$$

3.2. Események függetlensége

Az A és B események **függetlenek**, ha egyikük bekövetkezése nincs hatással a másikuk bekövetkezésének valószínűségére.

Formulával: A és B függetlenek, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Példa.

Egy tanulmány szerint a 10 évnél fiatalabb gyerekkel rendelkező anyák 60%-ának van teljes állása. Két ilyen anyát választunk véletlenszerűen. Feltesszük, hogy az, hogy van-e teljes állásuk, egymástól független. Mennyi a valószínűsége, hogy **mindkettőjüknek** van teljes állása?

$P(\text{mindkettőjüknek van teljes állása}) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36.$

Mi a valószínűsége annak, hogy **legalább egyikük-nek** van teljes állása?

$P(\text{legalább egyiküknek van}) =$

$= 1 - P(\text{egyiküknek sincs}) = 1 - [0.4 \cdot 0.4] = 0.84.$

Mi történik akkor, ha két független eseményt tekintünk a feltételes valószínűség formulájában?

Ha A és B függetlenek és $P(B) \neq 0$, akkor $P(A|B) = P(A)$.

Két esemény függetlensége tehát valóban azt jelenti, amit elvártunk: az egyik esemény bekövetkezése nem befolyásolja a másik bekövetkezésének valószínűségét.

4. Valószínűségi változók

Egy-egy kísérlet kimeneteleihez nagyon sokszor tartoznak számértékek (például: két kockával dobva, a dobott számok összege).

Egy az eseménytéren értelmezett függvényt **valószínűségi változónak** nevezünk.

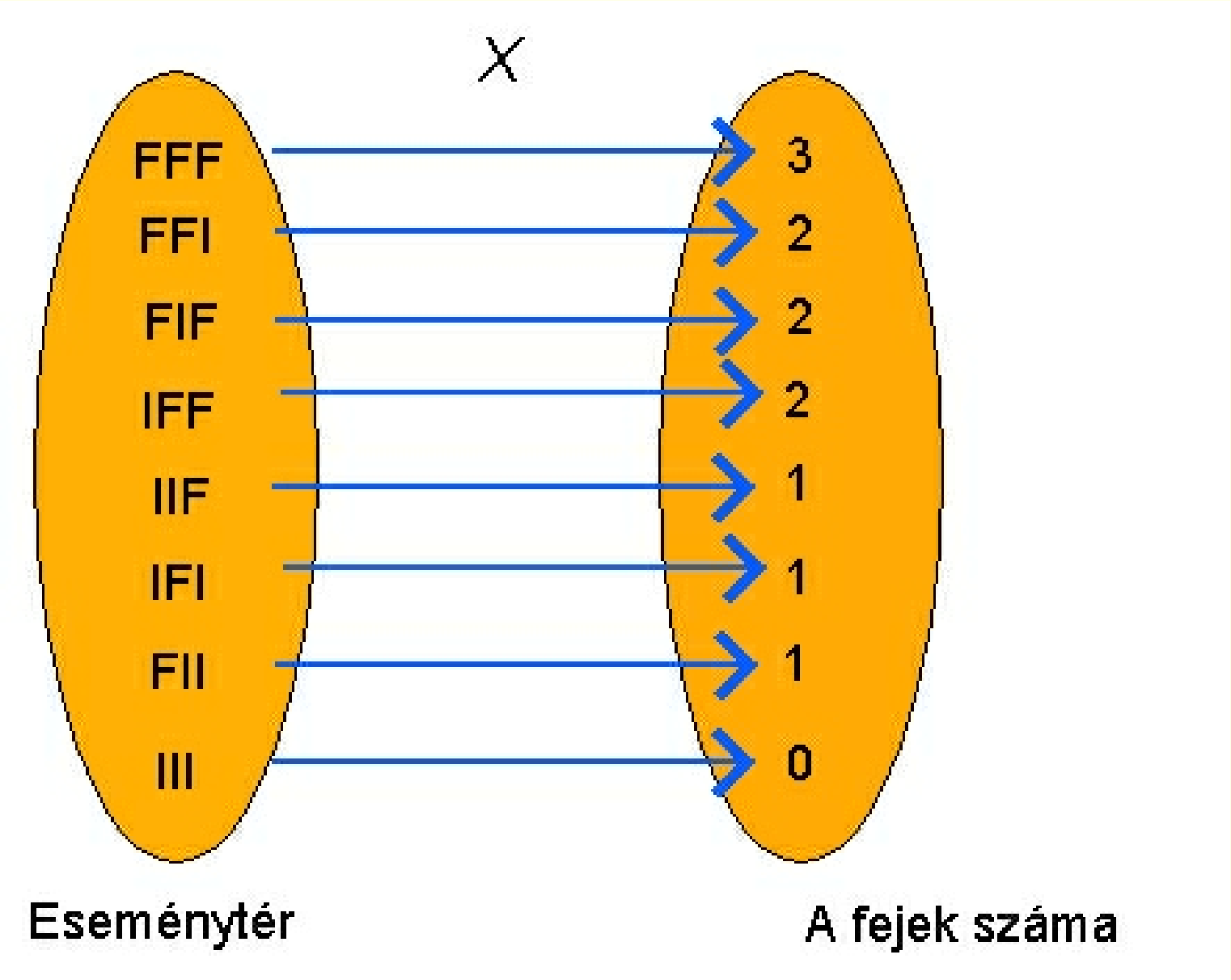
Példa.

Tekintsük azt a kísérletet, amelyben egy érmét háromszor feldobunk. Jelölje X a fejek számát.

Amint azt már tudjuk, az eseménytér most a következő:

$$\{fff, ffi, fif, iff, fii, ifi, iif, iii\}.$$

Ezért X lehetséges értékei (a fejek száma): $0, 1, 2, 3$. Ezt láthatjuk a következő ábrán:


X
FFF
FFI
FIF
IFF
IIF
IFI
FII
III
3
2
2
2
1
1
1
0
Eseménytér
A fejek száma

- **nulla fej** csak **egyszer** fordul elő,
- **egy fej háromszor**,
- **két fej háromszor**,
- **három fej** pedig csak **egyszer** fordul elő.

Tehát a példában szereplő X valószínűségi változó, hiszen értéke a kísérlet kimenetelétől függ.

5. Valószínűségi változók eloszlása

Egy valószínűségi változó **eloszlása** nem más, mint a változó **lehetséges értékeinek**, valamint az ezekhez tartozó **valószínűségeknek** az összessége.

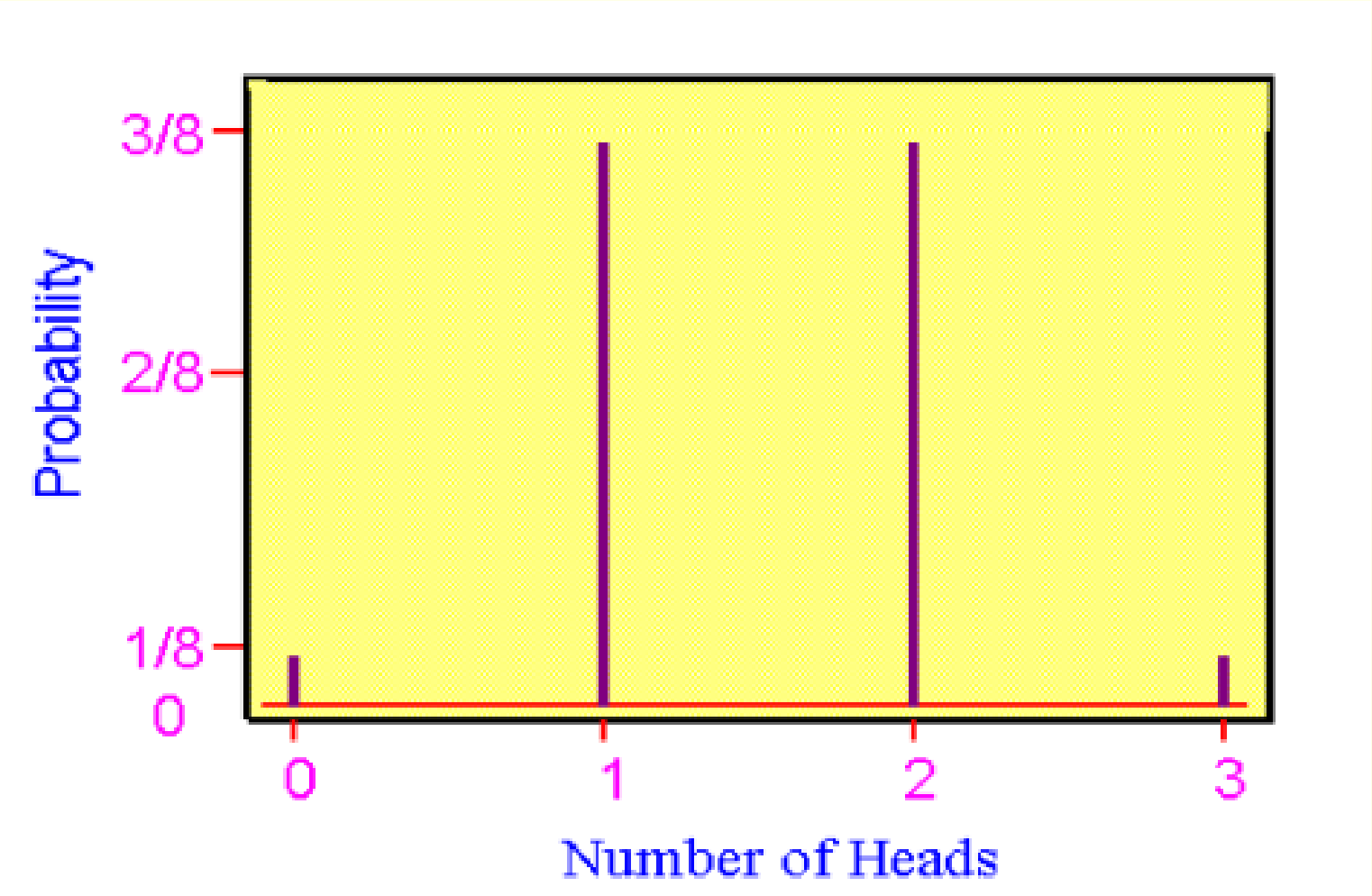
Ha egy X valószínűségi változó lehetséges értékei $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, akkor p_k annak a valószínűségét jelöli, hogy az X az x_k értéket veszi fel (vagyis $p_k := P(X = x_k)$).

Az előző vaszínűségi változó (a fejek száma, ha há-

romszor dobunk fel egy pénzérmét) eloszlását az alábbi táblázatban láthatjuk:

Fejek száma	Valószínűség
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
Összesen:	1

X eloszlásának grafikus szemléltetése:



Eloszlások jellemzői:

1. Bármely lehetséges érték valószínűsége 0 és 1 között van.
2. Ezen valószínűségek ,,összege" 1.

6. Valószínűségi változók függetlensége

Az A és B eseményeket akkor neveztük függetleneknek, ha az A bekövetkezése nem befolyásolta B esélyét. Formálisan: ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ fennállt. Erre vezetjük vissza valószínűségi változók

függetlenségét.

Két valószínűségi változót akkor nevezünk **függetlennek**, ha az egyikkel kapcsolatos **bármely** esemény független a másikkal kapcsolatos **bármely** eseménytől.

Ez tipikusan $(X = x)$, $(X < x)$, $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(x_1 < X < x_2)$ alakú eseményeket jelent.

7. Diszkrét valószínűségi változók

Egy valószínűségi változót **diszkrétnek** nevezünk, ha lehetséges értékeinek halmaza **megszámlálható**.

Másképpen: egy valószínűségi változó diszkrét, ha lehetséges értékei izolált pontok a számegyenesen.

Példa. Legyen X a fejek száma amikor egy érmét háromszor feldobunk. Ekkor X értékei 0, 1, 2 és 3. Tehát X diszkrét valószínűségi változó.

7.1. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Egy valószínűségi változót az eloszlásán kívül számos paraméterrel jellemezhetünk. Ezek között alapvető jelentőségű a várható érték.

A **várható érték** az adatok ,,közepének" elhelyezkedését mutatja.

A **várható érték** a lehetséges értékek **súlyozott átlaga**, ahol a súlyok az értékekhez tartozó valószínűségek.

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, lehetséges

értékei $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, az ezekhez tartozó valószínűségek pedig $p_k = P(X = x_k)$.

Az X **várható értékét** $M(X)$ vagy μ_X jelöli, ahol

$$\mu_X := M(X) := \sum_{\text{minden } x_k\text{-ra}} x_k P(X = x_k)$$

Használjuk az alábbi egyszerűbb formát is, ugyanezen tartalommal:

$$\mu_X = M(X) = \sum X \cdot P(X).$$

Ha X egy kockadobás eredményét jelenti, akkor X eloszlása: $(1, 1/6)$, $(2, 1/6)$, $(3, 1/6)$, $(4, 1/6)$, $(5, 1/6)$, $(6, 1/6)$. Ezért

$$\begin{aligned} M(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{6} = 3.5 \end{aligned}$$

Hangsúlyozzuk, hogy a várható érték **átlagérték**, és nem a leggyakrabban előforduló érték (a kockadobásnál a várható érték nincs is a lehetséges értékek között).

7.2. A medián és a módusz

Egy eloszlás közepének jellemzésére van két másik mennyiség is: a módusz és a medián.

Az X diszkrét valószínűségi változó **módusza** egy olyan x_k lehetséges értéke X-nek, amelyhez tartozó p_k valószínűség a legmagasabb.

A módusz nem feltétlenül egyértelmű. Ha X-nek csak egy módusza van, akkor eloszlását **unimodálisnak** nevezzük.

A **medián** olyan x_{med} szám, amelyre

$$P(X < x_{\text{med}}) \leq 1/2, \quad \text{és } P(X > x_{\text{med}}) \leq 1/2.$$

Belátható, hogy ilyen érték mindig létezik, bár nem mindig egyértelmű.

7.3. A variancia és a szórás

Adott várható értékű valószínűségi változók eloszlása sokféle lehet. Például minden origóra szimmetrikus eloszlású valószínűségi változó várható értéke nulla, annak ellenére, hogy lehetséges értékei illetve azok

valószínűségei a nulla ,,körül" más-más módon ,,tömörülhetnek".

Egy évfolyamról véletlenszerűen választott hallgató érdemjegyének várható értéke akkor is közepes, ha mindenki közepes, és akkor is, ha a társaság fele elégtelen, fele jeles osztályzatú.

A várható értéktől való átlagos eltérés (a változékonyság) mértékének jellemzésére vezetjük be a variancia (szórásnégyzet) illetve a szórás fogalmát.

Egy X diszkrét valószínűségi változó **varianciája** a $V(X)$-szel vagy σ_X^2-szel jelölt szám, amely a következő:

$$\sigma_X^2 := V(X) := M[(X - M(X))^2],$$

feltéve, hogy ez a várható érték létezik.

Most az alábbi egyszerűsített jelölést használjuk:

$$\sigma_X^2 = V(X) = \sum [(X - \mu_X)^2 \cdot P(X)].$$

Nyilvánvaló, hogy $V(X) \geq 0$. Ezért értelmes a következő fogalom.

Az X **szórása** a variancia négyzetgyöke, azaz
$$\sigma_X := \sqrt{V(X)}.$$

Példa.

Egy autókölcsönző cég az elmúlt 20 hét adatait összegyűjtve az alábbi táblázatban foglalta össze a heti kikölcsönzött autók számát:

Kölcsönzött autók száma	Hetek száma (gyakoriság)
10	5
11	6
12	7
13	2
Összesen:	20

Konvertáljuk a táblázat adatait úgy, hogy valószínűségeket kapjunk. Ezt mutatja a következő táblázat.

Kölcsönzött autók száma	Valószínűség
10	0.25
11	0.30
12	0.35
13	0.10
Összesen:	1

Számítsuk ki a hetente kikölcsönzött átlagos autó-számot:

$$\begin{aligned}\mu_X &= \sum X \cdot P(X) \\ &= (10)(0.25) + (11)(.30) + (12)(0.35) + (13)(0.10) \\ &= 11.3.\end{aligned}$$

Számítsuk ki a varianciát:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sum [(X - \mu_X)^2 \cdot P(X)] \\ &= 0.4225 + 0.0270 + 0.1715 + 0.2890 \\ &= 0.91.\end{aligned}$$

7.4. A várható érték és a variancia tulajdonságai

Legyen X és Y valószínűségi változó, és a, b valós számok. Ekkor

1. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$**.**

2. Ha X és Y **függetlenek**, akkor

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

3. Ha $Y = a \cdot X + b$ akkor

- $\mu_Y = a\mu_X + b$;
- $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$;
- $\sigma_Y = |a|\sigma_X$.

4. Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, melyek varianciája azonos ($V(X_1) = V(X_2) = \ldots = V(X_n) = \sigma^2$), akkor

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n \cdot \sigma^2$$

és

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma.$$